

FI3101-1 Mecánica Clásica.

Profesor: Marcel Clerc.

Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.



Auxiliar 1: Principio de Mínima Acción.

08 de Septiembre de 2020

P1. Ejemplo de cálculo variacional: La braquistócrona:

La curva *braquistócrona*¹ corresponde a la curva $y(x)$ que une a dos puntos A y B por la cual un cuerpo de masa m que está sujeto sólo a la aceleración de gravedad demora el menor tiempo posible en trasladarse.

- Encuentre el funcional $T[y, y']$ a minimizar en este problema.
- Minimice el funcional encontrado en la parte anterior y encuentre la ecuación diferencial que describe la curva pedida.
- Muestre que la siguiente parametrización satisface la ecuación diferencial encontrada en la parte anterior:

$$x(\theta) = \frac{1}{4gC^2}(\theta - \sin(\theta)) \quad ; \quad y(\theta) = \frac{1}{4gC^2}(\cos(\theta) - 1)$$

Esta curva es conocida como *cicloide*.

P2. Lagrangiano con 2da derivada temporal:

Considere una partícula de masa m cuyo lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \alpha\ddot{x}^2$$

Donde $k > 0$ y $\alpha > 0$.

- Encuentre una ecuación tipo Euler-Lagrange que permita encontrar la ecuación de movimiento de sistemas cuyo lagrangiano depende a lo más de la 2da derivada temporal de la coordenada generalizada.
- Usando el resultado anterior, encuentre la ecuación de movimiento de la partícula descrita.

P3. Principio de mínima acción para densidad lagrangiana:

La densidad lagrangiana que describe la hidrodinámica de un fluido ideal e incompresible es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 - \rho e(\rho) + \phi \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right)$$

Ocupando como “coordenadas generalizadas” ϕ y ρ , varíe la acción y obtenga las ecuaciones de movimiento. Definiendo la presión como $P(\rho) = \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho}$, muestre que se obtienen como ecuaciones de movimiento la *ecuación de continuidad* y la *ecuación de Euler* para un fluido.

¹Del griego *brachistos* (el más corto) y *chronos* (intervalo de tiempo).