Control 2 Problema 1

FI2004- Secciones 1, 2 y 3

tiempo: **18:00-19:30 hrs**

Un modelo para una hebra de polímero consiste en una cadena de N segmentos lineales. Estos solo pueden orientarse paralelamente a un eje, m de ellos en un sentido y $N-m$ en el contrario.

Parte A

1. Calcule el número de configuraciones (microestados) accesibles $\Omega(N, m)$.
2. Muestre que si se cumple: $N \gg 1$, $m \gg 1$ y $N-m \gg 1$, la entropía del sistema se puede expresar de la forma:

$$S = k[N \ln N - m \ln m - (N-m)\ln(N-m)]$$

   Use $\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$ si $n \gg 1$

3. Suponiendo que cada segmento tiene longitud a, exprese la entropía S en función de la longitud L de la cadena (que es a por el número de segmentos en un sentido menos el de segmentos en el opuesto). Denote por $L_\circ$ a la longitud de la cadena completamente extendida.

Parte B

4. Un extremo de la cadena se encuentra fijo (atado a una pared), mientras que se la somete a una tensión τ. Haga la analogía con el caso volumétrico identificando el largo L con el volumen V y la tensión τ con $-P$. (Formalmente, τ es la variable intensiva conjugada del largo L). Escriba los diferenciales dE y dF ($F = E - TS$ es la energía libre de Helmholtz o función de Helmholtz).
   - Relacione τ con una derivada parcial de F.
   - Deduzca además que (imponiendo temperatura constante):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T$$

5. En este modelo la energía E no depende de L, porque no se asoció una energía diferente a cada orientación de los segmentos (equivale por analogía al gas ideal, en el que la energía no depende del volumen sino solamente de la temperatura). Use este hecho para encontrar la tensión τ en función de a, $L_\circ$, L y T.
6. Verifique que si $L \ll L_\circ$ se recupera la ley de Hooke

   Dato: $\ln(1+x) \approx x$ si $x \ll 1$