

Pauta Control 2 - FI2002 - AA2020

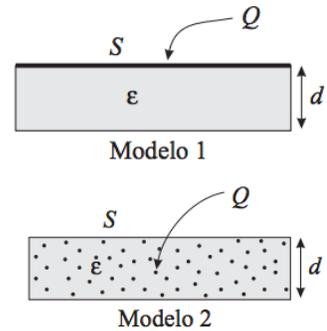
Electromagnetismo FI2002

December 24, 2020

1 Problemas parte eléctrica

Problema 1

Con el objetivo de analizar la forma en que se carga un material dieléctrico de permitividad ϵ al ponerse en contacto con un conductor cargado y luego separarse, se realizan experimentos con un bloque dieléctrico de superficie S y grosor d y se mide la diferencia de potencial entre sus dos caras. El área S es muy grande, así que la superficie puede considerarse infinita. Se proponen dos modelos de electrificación:



1. La carga libre Q transferida desde el conductor queda depositada en la superficie de contacto, creando una densidad superficial.
 2. La carga Q se distribuye uniformemente en el dieléctrico creando una densidad volumétrica.
- a) Determine las densidades de carga libre y de polarización, así como el campo eléctrico en todo el espacio, para cada uno de los dos modelos propuestos.
- b) Determine la diferencia de potencial entre ambas caras del dieléctrico para cada modelo, ¿puede discernirse qué modelo es el correcto a partir de las medidas de diferencia de potencial?

Problema 2

Un alambre rectilíneo de gran longitud está formado por dos materiales conductores dispuestos coaxialmente: uno, que constituye el núcleo de radio R_1 , tiene conductividad $\sigma_1 (\equiv g_1)$; el otro, que lo recubre hasta un radio R_2 , tiene conductividad $\sigma_2 (\equiv g_2)$. Si se aplica una diferencia de potencial V_0 entre sus extremos, tal que el alambre es recorrido por una corriente continua de intensidad I , determine:



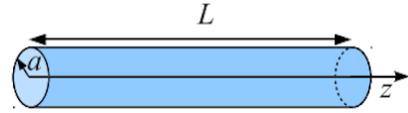
- a) La densidad de corriente y el campo eléctrico en cualquier punto del alambre.
- b) El campo magnético en cualquier punto del espacio, tanto dentro como fuera del alambre.

Problema 3

Considere una barra cilíndrica de longitud L y radio a hecha de un conductor óhmico cuya conductividad varía con la distancia al eje de la barra cilíndrica, r

$$g = g_0 a / r$$

donde g_0 es una constante. Se establece una diferencia de potencial V_0 entre las caras de los extremos de la barra alcanzándose el régimen de corriente estacionaria.



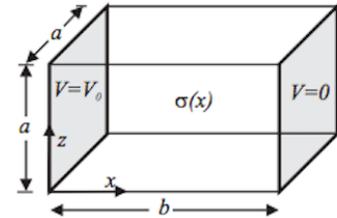
- a) Determine en qué dirección y de qué variables espaciales dependen la densidad de corriente y campo eléctrico al interior de la barra. Justifique su respuesta.
- b) Calcule la intensidad de corriente eléctrica y resistencia eléctrica de la barra.
- c) Suponga que se sustituye la barra conductora por otra barra cilíndrica con el mismo radio pero cuya conductividad es uniforme y vale g_0 . ¿Qué longitud ha de tener esta nueva barra para que su resistencia sea la misma que la de la barra anterior?

Problema 4

Entre dos electrodos planos, paralelos y muy extensos, distantes una distancia b , se coloca un conductor no homogéneo de sección cuadrada de lado a , con conductividad

$$g = g_0 b / x$$

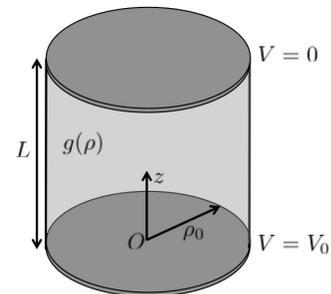
siendo x la distancia a uno de los electrodos. Si la diferencia de potencial entre los electrodos es V_0 .



- a) Determine en qué dirección y de qué variables espaciales dependen la densidad de corriente y campo eléctrico al interior de la barra. Justifique su respuesta.
- b) Calcule la intensidad de corriente, la resistencia y la densidad de carga libre en todo el sistema.
- c) Suponga que la batería se desconecta. Determine la evolución temporal de las cargas y la energía total disipada por efecto Joule.

Problema 5

Dos electrodos con forma de discos de radio ρ_0 , se encuentran separados por una distancia L y a una diferencia de potencial V_0 . Entre ellos se coloca un medio conductor cilíndrico de radio ρ_0 y con conductividad $g(\rho) = g_0 \rho / \rho_0$, donde ρ es la distancia al eje del cilindro, el cual coincide con eje z (ver figura). Utilizando coordenadas cilíndricas, despreciando efectos de borde, y suponiendo que se puede asumir que la densidad de corriente dentro del cilindro es $\vec{J}(\vec{r}) = J_z(\vec{r})\hat{z}$, encuentre:

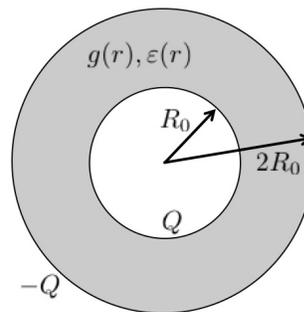


- a) El campo eléctrico \vec{E} en todo el cilindro.
- b) El campo magnético \vec{B} en todo el cilindro. (Explique y justifique claramente sus suposiciones)
- c) La potencia P disipada por el cilindro.

Problema 6

Un condensador consiste en dos cascarones conductores, de forma esférica y muy delgados, los que se disponen de manera concéntrica. El más grande tiene radio $r = 2R_0$ y el más pequeño $r = R_0$, y el espacio entre ellos se llena con un medio dieléctrico y conductor, de constante dieléctrica $\varepsilon = \varepsilon_0(r/R_0)$ y conductividad $g = g_0(r/R_0)$. Encuentre:

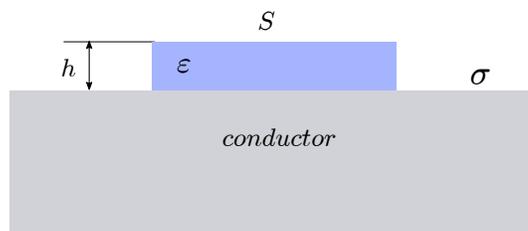
- La capacidad C del condensador.
- La resistencia R del condensador.
- Si la carga inicial del condensador es $Q(t = 0) = Q_0$, donde t es el tiempo. Encuentre $Q(t)$.



Problema 7

Un bloque dieléctrico, de constante dieléctrica ε , espesor h y superficie $S \gg h$, está en contacto con una superficie plana conductora que tiene una densidad superficial de carga σ , uniforme, como se indica en figura. Efectos de borde son despreciables.

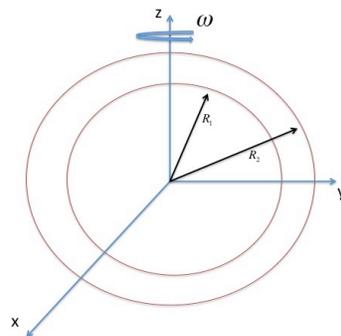
- Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.
- Calcular las densidades superficiales de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
- ¿Cómo cambian las respuestas para los casos *a*) y *b*) si el bloque dieléctrico se mueve una distancia $d < h$ desde el plano conductor? ¿Cómo depende de d la energía electrostática del sistema? ¿Hay una fuerza entre el bloque y el conductor?



2 Problemas parte magnética

Problema 8

Un sistema está compuesto por dos cascarones esféricos aislantes, concéntricos y de espesor despreciable que giran (en la misma dirección) con respecto a un eje z (véase la figura) con velocidad angular constante $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$. El cascarón interno tiene un radio $R_1 = 20 \text{ cm}$, y el externo $R_2 = 21 \text{ cm}$. Una carga eléctrica se distribuye uniformemente en los cascarones: el cascarón externo tiene carga $+Q$ mientras que el cascarón interno una carga $-Q$, y los dos cascarones están a una diferencia de potencial $\Delta V = 3 \text{ kV}$.

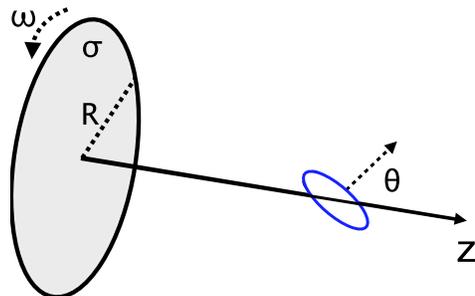


- Calcule el valor de la carga eléctrica presente en cada cascarón;
- Calcule, en magnitud y dirección, el momento dipolar magnético total de los cascarones rotantes;
- Calcule el valor del campo magnético en el centro del sistema;

Problema 9

Un disco de material aislante de radio $R = 2 \text{ m}$ está cargado con una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 10^{-4} \text{ C/m}^2$, el cual gira alrededor de su propio eje haciendo $N = 5000$ revoluciones por segundo.

- Determine la expresión del campo magnético generado por el disco a lo largo de los puntos del eje de rotación, y calcule el valor numérico del módulo en el punto puesto a una distancia $d = 10 \text{ cm}$ del disco;



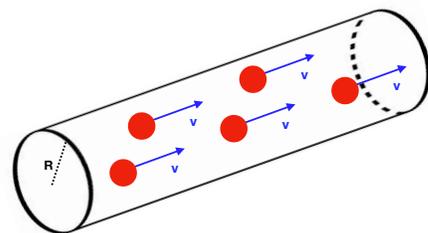
En el eje del disco a una distancia d se pone una espira circular de radio $r_s = 2 \text{ cm}$ en las cuales circula corriente eléctrica $I = 2 \text{ A}$:

- determine el módulo y la dirección de la fuerza sobre la espira cuando está orientada en la dirección del eje z .

Problema 10

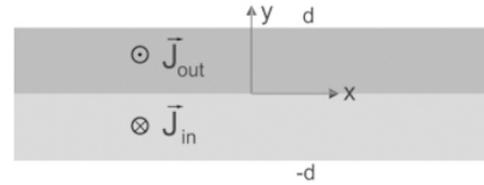
Un haz de protones (masa $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$, carga $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$), se mueven en movimiento rectilíneo uniforme con la misma velocidad v . El haz tiene una sección circular de radio $R = 5 \text{ cm}$ y una densidad uniforme n . Se pide:

- obtener las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos producidos por el haz, en función de la densidad n , la velocidad v y la distancia r desde el eje del haz;
- determinar el valor de la corriente transportada por el haz, si la relación entre los módulos de los campos eléctrico y magnético es $E/B = \gamma = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ m s}^{-1}$ y el campo eléctrico, a la distancia $r_o = 3.0 \text{ cm}$ del eje del cable, tiene módulo $E_o = E(r_o) = 2.75 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}$.



Problema 11

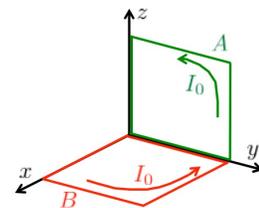
La figura muestra dos bloques con corriente. Ambos bloques son infinitos en las direcciones x y z , y tienen un espesor d en la dirección y . El bloque superior tiene una corriente entre $0 < y < d$, cuya densidad es uniforme $\vec{J} = J\hat{z}$, fuera de la página. El bloque inferior tiene una corriente entre $-d < y < 0$, cuya densidad es uniforme $\vec{J} = -J\hat{z}$, dentro de la página.



- Calcule el campo magnético en todo el espacio. Justifique en detalle su enfoque.
- Calcule la fuerza magnética por unidad de área que cada bloque siente debido al otro.

Problema 12

Dos espiras cuadradas de lado L portan corrientes de magnitud $I_0 (> 0)$, las que fluyen como muestra la figura. La espira A posee uno de sus vértices en el origen de coordenadas y sus aristas son paralelas a los ejes y y z . La espira B también posee uno de sus vértices en el origen de coordenadas y sus aristas son paralelas a los ejes x e y . Si existe un campo magnético dado por $\vec{B} = \hat{z}B_0(1 + x/L)$, encuentre las fuerzas y torques (con respecto al origen de coordenadas) que actúan sobre cada una de las espiras, sin hacer aproximaciones.



Problema 13

Dos casquetes cilíndricos muy largos, de aluminio, de radios interior a y exterior b están conectados a una batería que genera una diferencia de potencial V_0 entre ellos. El espacio entre los conductores está vacío. El conductor interior (que está al potencial más alto) se hace girar sobre su eje, con velocidad angular ω_0 , mientras el conductor exterior está fijo.

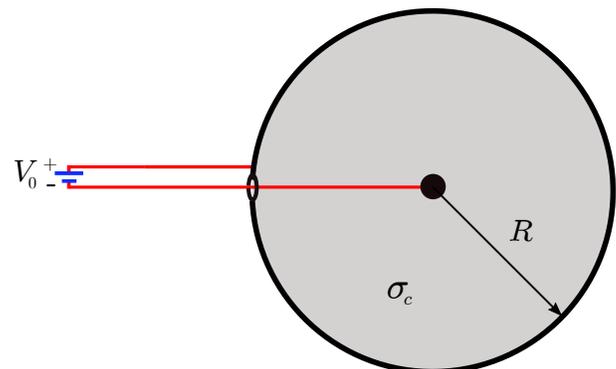
- Calcule el campo magnético en todo el espacio.
- Considere que ahora ambos cilindros giran en la misma dirección, con velocidad angular ω_0 . Calcule el campo magnético en todo el espacio.

Problema 14

El espacio entre dos superficies conductoras perfectamente esféricas (radios R y $r \ll R$) se llena con material de conductividad $\sigma_c (\equiv g)$. Mediante alambres conductores ideales (recubiertos con un material aislante perfecto y colocados muy cercanos) es posible conectar las superficies a una batería externa que provee una diferencia de potencial V_0 constante entre ellas. Interesa conocer,

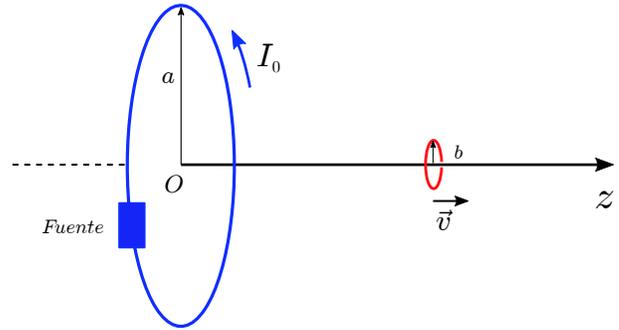
- La corriente que circula por los alambres.
- El campo magnético en todo el espacio.

Importante: Suponga radial la distribución de la densidad de corriente entre las esferas (no es afectada por los alambres que van a la batería).



Problema 15

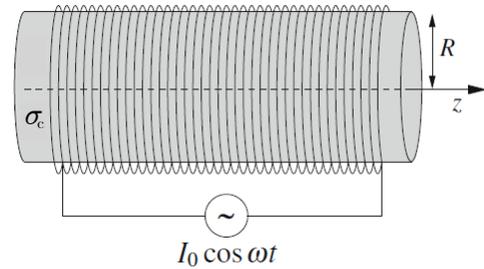
Por la espira plana de radio a , de resistencia R_0 e inductancia propia despreciable, fija en el espacio, circula una corriente continua I_0 gracias a una fuente de energía externa. La espira pequeña de radio b ($b \ll a$), de resistencia R e inductancia propia despreciable, es coaxial con la anterior y se mueve a lo largo del eje común Oz con velocidad constante v .



- a) Calcular la fem inducida en la espira pequeña cuando ésta se encuentra en cualquier punto sobre el eje.
- b) Determine la carga neta total que circuló por esta espira en su desplazamiento desde $z = 0 \rightarrow \infty$
- c) ¿La entrega de energía por unidad de tiempo de la fuente a la espira es constante o varía mientras la espira pequeña se mueve? Respalde su afirmación con argumentos y el cálculo respectivo.

Problema 16

Considere una bobina muy larga, con m vueltas por unidad de largo, enrollada alrededor de un material conductor cilíndrico de radio R y longitud $L \gg R$. El material tiene una conductividad $\sigma_c (\equiv g)$ y una permitividad magnética equivalente a la del vacío (μ_0). Una corriente alterna $I = I_0 \cos(\omega t)$ fluye por la bobina.

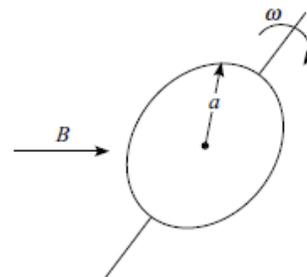


- a) Encontrar el campo eléctrico inducido en el conductor.
- b) Explique porqué el cilindro se calienta y calcule la potencia disipada.
- c) ¿Existe alguna modificación del campo magnético que genera la bobina por la presencia del conductor en su interior? Explique y, si es necesario, cuantifique su respuesta.

Importante: Suponga que efectos de borde y la corriente de desplazamiento son despreciables.

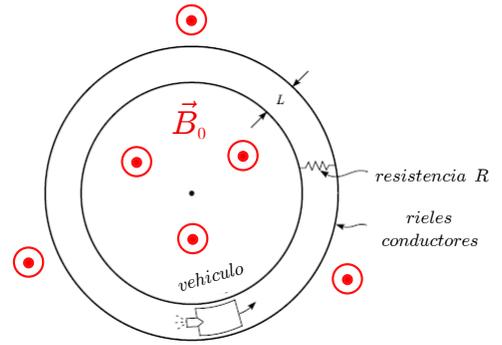
Problema 17

Una espira circular rota alrededor de un de sus diámetros con rapidez angular ω constante en presencia de un campo magnético B perpendicular al eje de rotación. Si la espira tiene una resistencia R y una inductancia propia L , determine la corriente que circula por la bobina en régimen permanente (más allá de un transiente que existe al iniciarse la rotación de la espira en el campo magnético). Comente los casos $\omega \sim 0$ y $\omega \rightarrow \infty$. Grafique (cualitativamente) la corriente y la fem en la espira como función del tiempo. Comente.



Problema 18

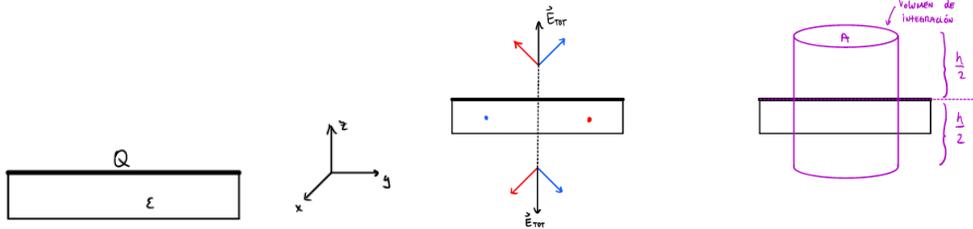
Un vehículo de metal viaja por sobre un conjunto de rieles perfectamente conductores y que forman un gran círculo. Los rieles están L metros aparte y en presencia de un campo magnético uniforme \vec{B}_0 normal a su plano (figura). La masa del vehículo es m y está impulsado por un motor de cohete que ejerce un empuje constante F_0 . El sistema actúa como un generador de corriente continua que alimenta una resistencia de carga R . Determine la corriente que circula por la resistencia en el tiempo y gráfíquela.



3 Pauta

Problema 1

Caso 1



a) Como S es muy grande consideramos a la superficie como infinita y por lo tanto va a haber simetría en el plano donde están las cargas. Por lo tanto los campo \vec{E} , \vec{D} no depende de estas coordenadas. Además, existe una simetría respecto al el eje z , en el sentido de que hay cargas a ambos lados del eje, generando un campo neto en la dirección \hat{z} . Concluimos entonces que:

$$\vec{E} = E(z)\hat{z} \quad \vec{D} = D(z)\hat{z}$$

Entonces, integrando la ecuación $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$ en un cilindro de altura h y area A , centrado en la superficie con carga, tenemos:

$$\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_l^{\text{enc}} \Rightarrow 2D(z)A = \frac{QA}{S} \Rightarrow \vec{D}(z) = \frac{Q}{2S} \hat{z} \begin{cases} +1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

(1 pto. por el vector \vec{D})

Donde el cambio signo viene del hecho de que las líneas de campo salen de las cargas y por lo tanto cambio el sentido del campo si estamos arriba o abajo del plano cargado. Este cambio satisface la condición de borde $(\vec{D}_{\text{arriba}} - \vec{D}_{\text{abajo}}) \cdot \hat{n} = \sigma_l = Q/S$. Luego el campo eléctrico cumple $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon(z)$, luego podemos calcular la polarización como $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$.

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{Q}{2S} \hat{z} \begin{cases} +1/\epsilon_0 & z > 0 \\ -1/\epsilon & -d < z < 0 \\ -1/\epsilon_0 & z < -d \end{cases} \Rightarrow \vec{P}(z) = -\frac{Q}{2S} \hat{z} \begin{cases} 0 & z > 0 \vee z < -d \\ \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} & -d < z < 0 \end{cases}$$

(0.5 ptos. por \vec{E} y \vec{P})

Con lo cual calculamos las cargas de polarización como **(0.75 ptos. en total ((0.25 ptos. por cada una)))**:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \quad \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}|_{\text{borde}}$$

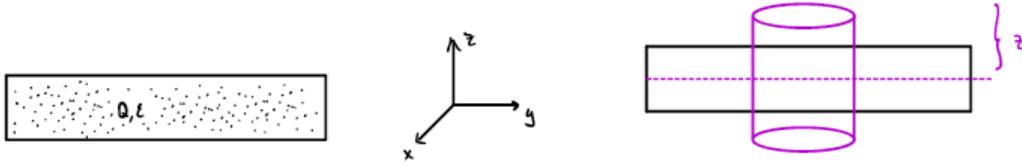
Donde hay 2 bordes, uno en $z = 0$ y otro en $z = -d$, con vectores normales \hat{z} y $-\hat{z}$ respectivamente. Entonces las cargas ligadas (de polarización) son:

$$\sigma_p|_{z=0} = -\frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2S\varepsilon} \quad \sigma_p|_{z=-d} = \frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2S\varepsilon}$$

b) La diferencia de potencial entre el borde inferior y el superior está dada por (**0.5 ptos.**):

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2S\varepsilon} \int_{-d}^0 dz = \frac{Qd}{2S\varepsilon}$$

Caso 2



a) Para este caso el sistema de referencia lo movemos al centro del dieléctrico. La densidad de carga libre ahora es volumétrica $\rho_l = \frac{Q}{Sd}$. Por argumentos análogos al caso 1, $\vec{D} = D(z)\hat{z}$ y entonces consideramos un volumen de integración cilíndrico centrado al medio del dieléctrico.

$$\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_l^{\text{enc}} \Rightarrow 2D(z)A = \begin{cases} \frac{Q}{Sd} 2|z|A & |z| < d/2 \\ QA & |z| > d/2 \end{cases} \Rightarrow \vec{D}(z) = \frac{Q}{S} \hat{z} \begin{cases} z/d & |z| < d/2 \\ \text{sgn}(z)/2 & |z| > d/2 \end{cases}$$

(**1 pto. por el vector \vec{D}**)

Donde la función signo esta para indicar el cambio de sentido del campo y esta dada por $\text{sgn}(z) = z/|z|$. Entonces el campo eléctrico y la polarización son:

$$\vec{E}(z) = \frac{\vec{D}}{\varepsilon(z)} = \frac{Q}{S} \hat{z} \begin{cases} z/d\varepsilon & |z| < d/2 \\ \text{sgn}(z)/2\varepsilon_0 & |z| > d/2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \vec{P}(z) = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{Q}{S} \hat{z} \begin{cases} \frac{z(\varepsilon - \varepsilon_0)}{d\varepsilon} & |z| < d/2 \\ 0 & |z| > d/2 \end{cases}$$

(**0.5 ptos. por \vec{E} y \vec{P}**)

Entonces las cargas de polarización son (**0.75 ptos. en total ((0.25 ptos. por cada una))**):

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = -\frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{dS\varepsilon}$$

$$\sigma_p|_{z=d/2} = \frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2S\varepsilon} \quad \sigma_p|_{z=-d/2} = \frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2S\varepsilon}$$

Notamos que en ambos casos el dieléctrico se mantiene neutro.

b) Para este caso la diferencia de potencial esta dada por (**0.5 ptos.**):

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{dS\varepsilon} \int_{-d/2}^{d/2} z dz = 0$$

Como en este caso no hay diferencia de potencial, es posible discernir cual caso es el que ocurre realmente solamente midiendo la diferencia de potencial entre ambos bordes. (**0.5 ptos.**)

Problema 2

a) Posicionamos el eje del cilindro en el eje z de coordenadas cilíndricas, con \hat{z} apuntando hacia la derecha. Debido a la diferencia de potencial V_0 entre los extremos $z = 0$ y $z = L$, mismo valor en ambos materiales, se genera un campo $\vec{E} = E(z)\hat{z}$, igual en ambos materiales. **(0.5 pts.)** Otra forma de argumentar que el campo es el mismo en ambos materiales viene de imponer las condiciones de borde del campo eléctrico.

Luego, por Ley de Ohm, tenemos que en el material interior hay una densidad de corriente $\vec{J}_1 = g_1\vec{E}$, y en el material exterior $\vec{J}_2 = g_2\vec{E}$ **(0.5 pts. por usar Ley de Ohm)**. Hasta este punto las densidades de corriente podrían depender de la coordenada z , a priori. Por continuidad, y dado que $\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = 0$, tenemos que $\nabla \cdot \vec{J}_{1,2} = 0$. De lo anterior, se concluye que las densidades de corriente son homogéneas **(1 pto. por ec. de continuidad y por decir que la densidad es homogénea)** (y también el campo eléctrico):

$$\vec{E} = E_0\hat{z}, \quad \vec{J}_1 = g_1E_0\hat{z}, \quad \vec{J}_2 = g_2E_0\hat{z} \quad (1)$$

Tomando como camino de integración Γ un círculo de radio $r > R_2$, con centro en el eje z , cuya superficie que forma tiene $\hat{n} = \hat{z}$, calculamos la intensidad de corriente que atraviesa al alambre

(2 pts. por calcular I) :

$$\int_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} J_1 r dr d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} J_2 r dr d\phi \quad (2)$$

$$= g_1 E_0 \pi R_1^2 + g_2 E_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) \quad (3)$$

$$= E_0 \pi (g_1 R_1^2 + g_2 (R_2^2 - R_1^2)) \quad (4)$$

Imponiendo que lo anterior es I :

$$E_0 = \frac{I}{\pi (g_1 R_1^2 + g_2 (R_2^2 - R_1^2))} \quad (5)$$

Finalmente, reemplazando, tenemos que la densidad de corriente es:

$$\vec{J} = \begin{cases} \vec{J}_1 = \frac{I g_1 \hat{z}}{\pi (g_1 R_1^2 + g_2 (R_2^2 - R_1^2))}, & \text{si } r < R_1 \\ \vec{J}_2 = \frac{I g_2 \hat{z}}{\pi (g_1 R_1^2 + g_2 (R_2^2 - R_1^2))}, & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \vec{0}, & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$

b) Considerando la forma de las densidades de corriente anteriormente planteadas, y utilizando la regla de la mano derecha, el campo magnético producido será $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ **(0.5 pts.)**, con distintos valores de $B(r)$ en cada región. Tomando como caminos de integración Γ círculos de radio r , con centro en el eje z , orientados perpendicularmente con respecto a \hat{z} , utilizamos la Ley de Ampère en cada región:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (6)$$

$r < R_1$ **(0.5 pts.)**:

$$B 2\pi r = \mu_0 J_1 \pi r^2 \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 J_1 r}{2} \hat{\phi} \quad (7)$$

$R_1 < r < R_2$ **(0.5 pts.)**:

$$B 2\pi r = \mu_0 J_1 \pi R_1^2 + \mu_0 J_2 \pi (r^2 - R_1^2) \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 (J_1 R_1^2 + J_2 (r^2 - R_1^2))}{2r} \hat{\phi} \quad (8)$$

$r > R_2$ (0.5 ptos.):

$$B2\pi r = \mu_0 J_1 \pi R_1^2 + \mu_0 J_2 \pi (R_2^2 - R_1^2) \implies \vec{B} = \mu_0 I \hat{\phi} \quad (9)$$

con J_1 y J_2 obtenidos en a).

Problema 3

a) Por la geometría del problema, \vec{J} y \vec{E} apuntan a lo largo de \hat{z} ($\vec{J} = J_z \hat{z}$ y $\vec{E} = E_z \hat{z}$). Entonces

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = g(r) \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

por lo que E_z no depende de z para un r cualquiera. Además

$$\int_0^L E_z dz = V_0, \quad (11)$$

por lo que $E_z = V_0/L$. Esto implica además que E_z tampoco depende de r . De esto vemos que:

$$J_z = g_0 \frac{a}{r} \frac{V_0}{L}, \quad (12)$$

que depende de r pero no de z .

b)

$$I = \int ds J_z = \int_0^a 2\pi r dr g_0 \frac{a}{r} \frac{V_0}{L} = 2\pi a^2 g_0 \frac{V_0}{L}, \quad (13)$$

por lo que

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L}{2\pi g_0 a^2}. \quad (14)$$

c) En el caso en que $g = g_0$, hacemos un razonamiento similar a lo anterior y obtenemos: $E_z = V_0/L$, $J_z = g_0 V_0/L$, $I = \pi a^2 g_0 V_0/L$, por lo que

$$R = \frac{L}{\pi a^2 g_0}. \quad (15)$$

Si se mantiene el mismo largo, R se dobla. Entonces para que R sea el mismo que antes, L debe reducirse a la mitad.

Problema 4

a) La diferencia de potencial se produce en la dirección x , por lo que esperamos que el campo eléctrico apunte en esa dirección y dependa sólo de la variable x . Es decir $\vec{E} = E(x)\hat{x}$ y como se satisface la ley de Ohm, también esperamos que $\vec{J} = J(x)\hat{x}$.

(0.5 ptos.)

b) En el estado estacionario se debe cumplir la ecuación de continuidad $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. De esta forma $\frac{dJ(x)}{dx} = 0 \implies J(x) = J_0$. (1 pto. por ec. de continuidad y por determinar que la densidad es constante). Por lo tanto $\vec{J} = J_0 \hat{x}$ y $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma(x)} = \frac{J_0 x}{g_0 b} \hat{x}$.

Este campo eléctrico lo relacionamos con la diferencia de potencial

$$V(x=0) - V(x=b) = V_0 = - \int_{x=b}^{x=0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{x=0}^{x=b} \frac{J_0 x}{g_0 b} dx = \frac{J_0 b}{2g_0}$$

Por lo tanto $J_0 = \frac{2V_0 g_0}{b}$. (0.5 ptos. por el cálculo de J_0)

La intensidad de corriente es (0.5 ptos.)

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = J_0 a^2 = \frac{2V_0 g_0}{b} a^2$$

Ocupando que $V = IR$, determinamos la resistencia (**0.5 ptos.**)

$$R = \frac{b}{2g_0a^2}$$

Con el campo eléctrico podemos calcular las cargas libres. De la primera ecuación de Maxwell, y debido a que no hay polarización pues tenemos que la permitividad es ϵ_0 , se tiene

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{J_0}{g_0b} = \epsilon_0 \frac{2V_0}{b^2}$$

Además se tienen cargas libres en los electrodos.

En $x = 0$ se tiene que $\sigma_1 = \epsilon_0 E(x = 0) = 0$

En $x = b$ se tiene que $\sigma_1 = -\epsilon_0 E(x = b) = -\epsilon_0 \frac{J_0}{g_0} = -\epsilon_0 \frac{2V_0}{b}$ (**0.5 ptos por cada densidad carga libre, 1.5 ptos en total**)

c) Si la batería se desconecta, no existirá un agente externo que mantenga la diferencia de potencial entre los electrodos. Las cargas dentro del conductor se moverán hasta que el campo eléctrico en el sistema desaparezca. (**0.5 ptos.**)

La energía inicial almacenada se puede calcular a través de por ejemplo:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dV \quad \text{o} \quad U = \frac{1}{2} \int V dq$$

Al calcular nos da:

$$U = \frac{2\epsilon_0 a^2}{3b} V_0^2$$

Esta energía se disipará por efecto Joule. (**1 pto. por el cálculo**)

Problema 5

a) En estado estacionario, $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, y como $\vec{J} \parallel \hat{z}$, tenemos que $\partial J_z / \partial z = 0$. Pero como $J_z = g_0 \rho E_z / \rho_0$, E_z no depende de z . Entonces, como

$$-\int_0^L E_z dz = 0 - V_0, \quad (16)$$

se tiene que

$$\vec{E} = \frac{V_0}{L} \hat{z}. \quad (17)$$

b) La simetría cilíndrica del problema hace que \vec{B} tenga también simetría cilíndrica. Usando ley de Ampere:

$$I(\rho)\mu_0 = \oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \oint dl \hat{\phi} \cdot B_\phi \hat{\phi} = 2\pi\rho B_\phi, \quad (18)$$

donde $I(\rho)$ es la corriente que fluye dentro del radio ρ a lo largo de \hat{z} , la cual está dada por:

$$I(\rho) = \int_0^\rho 2\pi J_z(\rho') \rho' d\rho' = 2\pi \int_0^\rho \rho' g(\rho') E_z d\rho' = 2\pi \frac{V_0 g_0}{L \rho_0} \frac{\rho^3}{3}, \quad (19)$$

por lo que

$$\vec{B} = \hat{\phi} \mu_0 \frac{V_0 g_0}{L \rho_0} \frac{\rho^2}{3}. \quad (20)$$

c)

$$P = V_0 I(\rho = \rho_0) = 2\pi V_0^2 \frac{g_0}{L} \frac{\rho_0^2}{3}. \quad (21)$$

Problema 6

a) Aplicando ley de Gauss al desplazamiento eléctrico, se tiene que en el medio entre cascarones

$$\vec{D} = \hat{r} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad (22)$$

por lo que

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi r^2} = \hat{r} \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi r^2 (r/R_0)}. \quad (23)$$

Entonces la diferencia de potencial entre los cascarones V es

$$V = \frac{QR_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_0}^{2R_0} \frac{dr}{r^3} = \frac{3Q}{32\pi\epsilon_0 R_0}, \quad (24)$$

y

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{32\pi}{3} \epsilon_0 R_0. \quad (25)$$

b)

$$\vec{J} = g\vec{E} = \hat{r} \frac{Qg_0}{4\epsilon_0 \pi r^2 (r/R_0)} (r/R_0) = \frac{\hat{r} Qg_0}{4\epsilon_0 \pi r^2}. \quad (26)$$

Por lo que

$$I = J_r 4\pi r^2 = \frac{Qg_0}{\epsilon_0}, \quad (27)$$

donde $\vec{J} = J_r \hat{r}$. Entonces

$$R = \frac{V}{I} = \frac{3}{32\pi R_0 g_0}. \quad (28)$$

c) El circuito en cuestión corresponde a un circuito RC . Vimos en clases que en estos casos $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$, según los cálculos de las letras a) y b), $RC = \epsilon_0/g_0$, por lo que

$$Q(t) = Q_0 e^{-t g_0 / \epsilon_0}. \quad (29)$$

Otra forma de resolverlo: usando la ecuación de continuidad.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La que integrada en un volumen (entre los dos cascarones):

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} Q(t) \Rightarrow 4\pi r^2 \frac{Q(t)g_0}{4\epsilon_0 \pi r^2} = -\frac{d}{dt} Q(t) \Rightarrow \frac{Q(t)g_0}{\epsilon_0} = -\frac{d}{dt} Q(t)$$

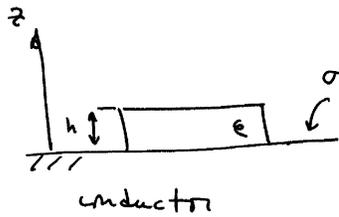
cuya solución es:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t g_0 / \epsilon_0}. \quad (30)$$

Problema 7

Problema 9

las respuestas deben ser justificadas



a) plano conductor infinito
 2 pts con densidad superficial de
 carga libre σ . Simetría:

$$\vec{E} = E(z) \hat{z} \quad (\vec{D} = D(z) \hat{z})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c \Rightarrow D(z) = \begin{cases} \sigma & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

entonces, no depende de z fuera del conductor

$$\vec{E} = 0 \text{ en conductor}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \text{ (fuera conductor y dieléctrico)}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{z} \text{ (en dieléctrico)}$$

b) densidades de carga de polarización
 2 pts recta Polarización $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$

\vec{P} uniforme $\Rightarrow \rho_p = 0$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{z} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_p(z=h) = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \sigma \\ \quad \quad \quad = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma \\ \sigma_p(z=0) = -\sigma_p(z=h) \end{array} \right.$$

c) Nada cambia porque
 2 pts campos son constantes. Por supuesto, tampoco
 habría fuerza sobre el dieléctrico

Problema 8

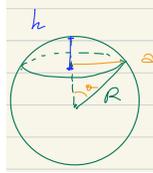
- a) **0.5pt.** La ddp entre los cascarones

$$|\Delta V| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

y la carga es

$$Q = 4\pi\epsilon_0 |\Delta V| \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

- b) **2.5pt.** Se toma un casquete del cascarón, y su superficie es $d\Sigma = 2\pi R h = 2\pi R(R \sin \theta)d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ La



carga es $dq = \sigma d\Sigma$ y la corriente $di = dq/T = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta / (2\pi/\omega)$. Este casquete se puede pensar como un espira con superficie $d\Sigma_1 = \pi a^2 = \pi R^2 \sin^2 \theta$ donde circula di y por el principio de equivalencia de Ampère $dm = id\Sigma_1 = \pi\sigma\omega R^4 \sin^3 \theta d\theta$. Integrando

$$m = \frac{4\pi}{3} \sigma\omega R^4 = \frac{Q}{3} \omega R^2$$

y el total es

$$m = \frac{Q}{3} \omega (R_2^2 - R_1^2) = 1.9 \cdot 10^{-8} \text{ A m}^2$$

- c) **3pt** Se usa el cálculo de antes. La espira en el casquete de radio $a = R \sin \theta$ y $di = \omega\sigma R^2 \sin \theta d\theta$, o sea anillo que genera un campo magnético, el cual es

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde z es la distancia desde el centro del anillo y el centro de los cascarones (el estudiante tiene que calcularlo, no vale escribirlo). El campo magnético total, integrando en θ , es $B = \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R$. Y de todo el sistema

$$B = \frac{Q\mu_0\omega}{6\pi} = (1/R_1 - 1/R_2) = 2.2 \cdot 10^{-13} \frac{\text{Ns}}{\text{C m}} = 2.2 \cdot 10^{-13} \text{ T}.$$

El campo magnético apunta hacia abajo porque la contribución del cascarón interior $Q < 0$ es más grande.

Problema 9

- a) **3pt** Dividimos el disco en coronas circulares $x \rightarrow r + dr$ y la carga será $dq = \sigma d\Sigma = \sigma(2\pi r dr)$. La rotación genera una corriente $di = dq/T = \omega\sigma r dr$, y la corona genera un campo magnético (tienen que calcularlo)

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2} \frac{r^2}{(d^2 + r^2)^{3/2}}$$

, donde d es la distancia desde el centro de la corona y el punto donde se calcula el B . Integrando:

$$B = \int_0^R dB = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma \int_0^R \frac{r^3}{(d^2 + r^2)^{3/2}} dr = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma \left[\frac{2d^2 + R^2}{\sqrt{d^2 + R^2}} - 2d \right] = 3.6 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

(acordar que $1 \text{ rad/sec} = 30/\pi/60 = 0.159 \text{ revoluciones/sec}$).

- b) **3pt** Porque el radio de la espira circular es pequeño $r_s \ll R$, se puede aproximar el campo uniforme en toda la espira. La espira tendrá $m = i \cdot S = i\pi r_s^2$. La energía potencial magnética es $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}(d)$, mínima cuando \vec{m} es paralelo a \vec{B} ($\theta = 0$) y la fuerza es $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}(x)) = m dB/dx$ (única coordenada).

$$F = (\pi r_s^2 i) \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma \frac{d}{dx} \left[\frac{2x^2 + R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right] = -9.2 \cdot 10^{-9} \text{N}$$

Problema 10

- a) **3.0pt** Usando Gauss para el haz que se considera como un cilindro tenemos

$$- r < R \quad \rightarrow \quad 2\pi r E(r) = Q_{tot}/\epsilon_0 = \frac{n e \pi r^2}{\epsilon_0} \quad \text{o sea } E(r) = \frac{n e}{2\pi} r.$$

$$- r > R \quad \rightarrow \quad 2\pi r E(r) = Q_{tot}/\epsilon_0 = \frac{n e \pi R^2}{\epsilon_0} \quad \text{o sea } E(r) = \frac{n e R^2}{2\pi r}.$$

Por Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 j \Sigma = \mu_0 (nev) \Sigma$, con Σ sección del haz.

$$- r < R \quad \rightarrow \quad 2\pi r B = \mu_0 (nev) \pi r^2 \quad B = \frac{1}{2} \mu_0 n e v r$$

$$- r > R \quad \rightarrow \quad 2\pi r B = \mu_0 (nev) \pi R^2 \quad B = \frac{1}{2} \mu_0 n e v R^2 / r$$

- b) **3.0pt** la razón $E/B = 1/(\epsilon_0 \mu_0 v)$ es independiente de r y R en ambos casos. Encontramos $v = 1/(\epsilon_0 \mu_0) B/E = 6 \cdot 10^6 \text{m/s}$. n , que nos sirve para la corriente, lo encontramos usando el caso $r < R$: $n = 2\epsilon_0 E/(e r_0)$ y la corriente

$$i = j \pi R^2 = n v e R^2 = \frac{2\epsilon_0 E v \pi R^2}{r_0} = 76.4 \text{A}$$

Problema 11

a) Se aplica ley de Ampère sobre uno de los bloques para determinar el campo. Se toma el bloque superior, con $\vec{J} = J\hat{z}$, y se posiciona tal que su plano medio coincida con el plano xz . Por regla de la mano derecha, es claro que el campo apunta en la dirección $-\hat{x}$ para $y > 0$ y en dirección \hat{x} para $y < 0$.

Aplicamos la ley de Ampère para $|y| < d$, usando el loop de ancho ℓ que se muestra en la parte superior de la figura. De acuerdo a la simetría del problema y la regla de la mano derecha se puede justificar que $\vec{B} = \pm B(y)\hat{x}$ (**0.5 pts. por justificar**), obtenemos:

$$(-B)(-\ell) + B\ell = \mu_0 (J \cdot \ell \cdot 2y)$$

$$B = \mu_0 J y$$

(1 pt. por calcular el campo dentro)

Para $|y| > d$ usamos el loop de ancho ℓ que se muestra en la parte inferior de la figura. Obtenemos:

$$(-B)(-\ell) + B\ell = \mu_0 (J \cdot \ell \cdot d)$$

$$B = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J d}{2} & y > d \\ \frac{\mu_0 J d}{2} & y < -d \end{cases}$$

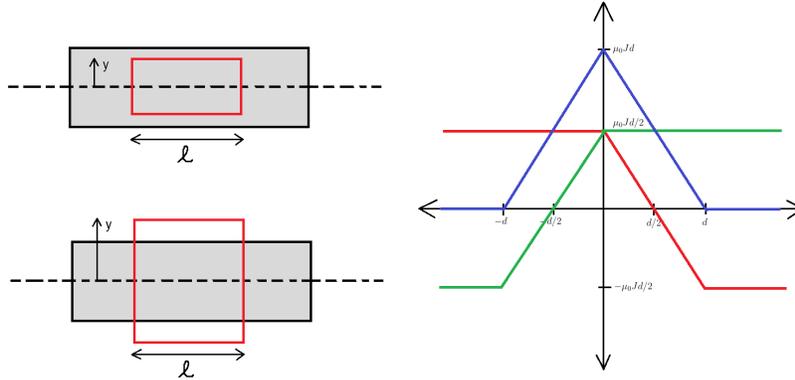
(1 pt. por calcular el campo fuera)

El campo magnético producido por el bloque con corriente $\vec{J} = -J\hat{z}$ será el mismo, pero con los signos cambiados.

Se usa el principio de superposición para calcular el campo magnético total. Es importante que correr el origen de coordenadas del campo producido por cada bloque, tal que el centro del bloque superior quede en $y = d/2$ y el centro del bloque inferior en $y = -d/2$.

En la figura se muestra un gráfico de los dos campos por separado y superpuestos. En rojo está el campo producido por el bloque superior, en verde el campo producido por el bloque inferior, y en azul el campo magnético total. (**2 pts. por superponer bien**)

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & d < y \\ \mu_0 J(d-y)\hat{x} & 0 < y < d \\ \mu_0 J(y+d)\hat{x} & -d < y < 0 \\ 0 & y < -d \end{cases}$$



b) Calculamos la fuerza que siente el bloque superior debido al campo producido por el bloque inferior, el cual en aquella zona corresponde a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J d}{2} \hat{x}$$

La fuerza que se calcula de la siguiente forma, donde la integral es sobre la distribución de corriente del bloque superior:

$$\vec{F}_{mag} = \int (\vec{J} \times \vec{B}) dV$$

Dado que los bloques son infinitos en el plano xz , la fuerza por unidad de área A estará dada por:

$$\frac{\vec{F}_{mag}}{A} = \int (\vec{J} \times \vec{B}) dl$$

$$\frac{\vec{F}_{mag}}{A} = \int J \hat{z} \times \frac{\mu_0 J d}{2} \hat{x} dy$$

$$\frac{\vec{F}_{mag}}{A} = \frac{\mu_0 J^2 d}{2} \hat{y} \int dy$$

$$\frac{\vec{F}_{mag}}{A} = \frac{\mu_0 J^2 d^2}{2} \hat{y}$$

(1.5 pto. por calcular la fuerza por unidad de área)

Problema 12 (Mario)

i) Fuerza \vec{F} sobre espira A (1.5 ptos):

La espira A experimenta un campo $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ de valor uniforme. Entonces:

$$\vec{F} = I_0 [\oint d\vec{r} \times B_0 \hat{z}] = 0 \quad (\text{dado que } \oint d\vec{r} = 0). \quad (31)$$

ii) Torque $\vec{\tau}$ sobre espira A (1.5 pts):

Dado que la espira A experimenta un campo uniforme, $\vec{\tau}$ se calcula según el resultado encontrado en clases:

$$\vec{\tau} = I_0 \vec{m} \times \vec{B} = I_0 L^2 \hat{x} \times B_0 \hat{z} = -I_0 B_0 L^2 \hat{y}. \quad (32)$$

iii) Fuerza \vec{F} sobre espira B (1.5 pts):

Como \vec{B} depende de x y no de y , las fuerzas sobre las aristas paralelas a x son iguales en magnitud pero apuntan en sentidos contrarios. Entre ambas no aportan a \vec{F} . Entonces considerando las fuerzas sobre las aristas paralelas a y , tenemos:

$$\vec{F} = I_0 L (\hat{y} \times \hat{z} 2B_0 - \hat{y} \times \hat{z} B_0) = \hat{x} I_0 L B_0. \quad (33)$$

iv) Torque $\vec{\tau}$ sobre espira B (1.5 pts):

Primero consideremos el torque sobre los lados paralelos a x , $\vec{\tau}_x$:

$$\vec{\tau}_x = I_0 \int_0^L x \hat{x} \times (dx \hat{x} \times \vec{B}(x)) - I_0 \int_0^L (L \hat{y} + x \hat{x}) \times (dx \hat{x} \times \vec{B}(x)) \quad (34)$$

$$= I_0 \int_0^L L \hat{y} \times dx B(x) \hat{y} = 0 \quad (35)$$

Ahora consideremos el torque sobre los lados paralelos a y , $\vec{\tau}_y$:

$$\vec{\tau}_y = I_0 \int_0^L (L \hat{x} + y \hat{y}) \times (dy \hat{y} \times 2B_0 \hat{z}) - I_0 \int_0^L y \hat{y} \times (dy \hat{y} \times B_0 \hat{z}) \quad (36)$$

$$= -\hat{z} I_0 B_0 L^2 / 2. \quad (37)$$

Entonces

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_x + \vec{\tau}_y = -\hat{z} I_0 B_0 L^2 / 2. \quad (38)$$

Problema 13

I. Cálculo de las densidades de carga en función de V_0 . (2.0 pts.) Las densidades de carga superficial en los cilindros de radios a y b son σ_a y σ_b respectivamente. Luego el campo eléctrico entre los casquetes cilíndricos es (Ley de Gauss:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (39)$$

La diferencia de potencial resulta igual a:

$$V_0 = \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \ln(b/a) \quad (40)$$

Entonces:

$$\sigma_a = \frac{\epsilon_0 V_0}{a \ln(b/a)} \quad (41)$$

II. Cálculo de B_a (2 pts.)

Note que $\sigma_a a + \sigma_b b = 0$ Entonces, la densidad de corriente superficial en $r = a$ es:

$$J_s = \sigma_a v_a = \sigma_a a \omega \quad (42)$$

Esta densidad de corriente genera un campo magnético en $r < a$: (Ley circuital de Ampère)

$$B_a = \mu_0 \sigma_a a \omega \quad (43)$$

Si la rotación es contraria a los punteros del reloj, la dirección del campo magnético la elegimos \hat{z} . En el resto del espacio $B = 0$ (bobina infinita).

III. Cálculo del campo cuando ambos cilindros giran en la misma dirección. (2 pts.)

Si ahora ambos cilindros giran en la misma dirección, producen campos magnéticos de igual magnitud y signo opuesto en $r < a$, pues la carga del cilindro exterior es negativa y se cumple que $\sigma_a a + \sigma_b b = 0$. Así, $B = 0$ en $r < a$. En la zona $a < r < b$ el campo es el producido por la carga negativa:

$$B_b = \mu_0 \sigma_b b \omega \quad (44)$$

Este campo apunta en la dirección $-\hat{z}$ pues σ_b es negativa. En el resto del espacio $B = 0$.

Problema 14

Problema 8

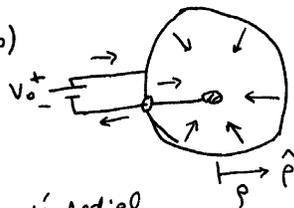
a) 3 pts (deben demostrar cada paso)

- \vec{E} entre esferas

$$\vec{E}(p) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 p^2} \hat{p}$$

$p \equiv$ coord. radial $\hat{p} \equiv$ dirección radial

con $Q = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]} V_0$



- entre esferas: $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$

\Rightarrow corriente I que fluye por conductores es la misma que fluye de esfera exterior a la interior.

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

S : superficie esférica radio p
 $d\vec{s} = p^2 d\Omega (-\hat{p})$

$$\therefore I = \sigma_c \frac{Q}{\epsilon_0} = \sigma_c \frac{4\pi}{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]} V_0$$

b) 3 pts. No hay campo magnético (tienen que demostrarlo)
 Buen argumento (1 pts)

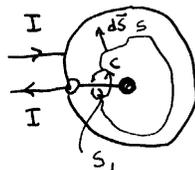
Ampère $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Tomar S : cualquier superficie abierta limitada por trayectoria C

$$\oint_{C(s)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = -I + \alpha \quad (\alpha: \text{pección corriente que pase por orificio})$$

$$\oint_{C(s_1)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = +I - \alpha \quad (S_1: \text{superficie pequeña limitada por } C)$$

ambas ecs. $\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \Rightarrow \vec{B} = 0$ interior
 $\vec{B} = 0$ fuera (no hay fuente)



Problema 15

a) Se obtiene el campo magnético en el eje de la espira grande por integración directa, donde $I d\vec{\ell} = I_0 a d\theta \hat{\theta}$, $\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a\hat{r}$ obteniendo

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I_0 a \hat{\theta} \times (z\hat{z} - a\hat{r})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{\mu_0 I_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Luego como la espira pequeña tiene un radio mucho menor que el de la espira grande, el campo magnético que atraviesa su superficie es aproximadamente uniforme y corresponde a $\vec{B}(z)$ recién calculado, así el flujo de campo magnético a través de la espira chica resulta (según una normal \hat{z})

$$\Phi_b = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = B(z) \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_0 \pi a^2 b^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Con esto la fem inducida en la espira chica viene dada por

$$\mathcal{E}_b = -\dot{\Phi}_b = \frac{3\mu_0 I_0 \pi a^2 b^2 z \dot{z}}{2(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

Pero $\dot{z} = v_0$ así

$$\mathcal{E}_b = \frac{3\mu_0 I_0 \pi a^2 b^2 v_0 z}{2(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

b) La corriente que circula por la espira chica al despreciar autoinductancias sería

$$I_b = \frac{\mathcal{E}_b}{R} = -\frac{\dot{\Phi}_b}{R}$$

como $I_b = \frac{dQ_b}{dt}$ la carga total que circuló en el movimiento $z = 0 \rightarrow \infty$ se obtiene mediante

$$Q_b = \int_0^\infty I_b(z) dz = -\frac{1}{R} \int_0^\infty \dot{\Phi}_b(z) dz = -\frac{v_0}{R} [\Phi_b(\infty) - \Phi_b(0)] = \frac{\mu_0 I_0 \pi b^2 v_0}{2aR}$$

c) Por la espira chica circula una corriente que genera un campo magnético que varía en el tiempo en la superficie encerrada por la espira grande, por lo que induce una f.e.m que se opone a la que la originó. Esta f.e.m varía con la posición de la espira chica, por lo que la potencia entregada por la fuente también varía para así mantener la corriente constante I_0 en la espira grande.

Esto se cuantifica notando que la inductancia mutua al ser simétrica viene dada aproximadamente por $M(z) = \frac{\Phi_b}{I_0}$ y el flujo magnético en la espira grande debido a la chica queda $\Phi_a = M(z) I_b(z) = -\frac{\Phi_b \dot{\Phi}_b}{I_0 R} = \frac{3\mu_0^2 I_0 \pi^2 a^4 b^4 v_0 z}{4R(a^2 + z^2)^4}$ luego la f.e.m total en la espira grande es

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\text{fuente}} - \dot{\Phi}_a$$

dicha f.e.m debe ser igual a $I_0 R_0$ por lo que

$$\mathcal{E}_{\text{fuente}} = I_0 R_0 + \dot{\Phi}_a = I_0 R_0 + \frac{3\mu_0^2 I_0 \pi^2 a^4 b^4 v_0^2}{4R} \cdot \frac{a^2 - 7z^2}{(a^2 + z^2)^5}$$

Luego la energía por unidad de tiempo entregada por la fuente es

$$P_{\text{fuente}} = \mathcal{E}_{\text{fuente}} I_0 = R_0 I_0^2 + \frac{3\mu_0^2 I_0^2 \pi^2 b^4 v_0^2}{4a^4 R} \cdot \frac{1 - 7(z/a)^2}{(1 + (z/a)^2)^5}$$

o en función del tiempo

$$P_{\text{fuente}}(t) = R_0 I_0^2 + \frac{3\mu_0^2 I_0^2 \pi^2 b^4 v_0^2}{4a^4 R} \cdot \frac{1 - 7(v_0 t/a)^2}{(1 + (v_0 t/a)^2)^5}$$

que claramente varía con el tiempo. Se observa que para $0 < v_0 t < \frac{a}{\sqrt{7}}$ la fuente trabaja más en comparación a si se despreciara la inductancia mutua, y para tiempos mayores la fuente trabaja menos.

Otra respuesta válida sería suponer que se desprecian los efectos de la inductancia mutua, en cuyo caso la potencia entregada por la fuente es constante en el tiempo y sería simplemente $R_0 I_0^2$.

Problema 16

a) Conociendo que la corriente que fluye por las espiras es $I = I_0 \cos(\omega t)$, podemos calcular el campo magnético en el espacio. Es conocido que el campo en el conductor es un campo que apunta en la dirección \hat{z} y fuera de él es nulo. Usando ley de Ampere, tomando un camino cerrado rectangular de largo l paralelo a z y ancho a paralelo r , que encierre a $m \cdot L$ espiras.

$$B(z) \cdot l = \mu_0 m l I$$

$$\vec{B}(z, t) = \mu_0 m I_0 \cos(\omega t) \hat{z}$$

Como hay un cambio del campo magnético en el tiempo, podemos encontrar el campo eléctrico con la ley de Faraday-Lenz.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

El campo eléctrico inducido será angular $\vec{E} = E \hat{\theta}$

$$E \cdot 2\pi r = \mu_0 m I_0 \omega \sin(\omega t) \cdot \pi r^2$$

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \mu_0 m I_0 \omega \sin(\omega t) \cdot r \hat{\theta}$$

b) El hecho de que el conductor al interior tenga una conductividad no nula, implicará la existencia de una corriente a través de él. Habrán disipaciones de energía debido al efecto Joule, las cuales serán en forma de calor. Esto explica por qué el conductor se calienta.

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$$

$$P_{dis} = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

$$= \frac{\sigma_c}{4} (\mu_0 m I_0 \omega \sin(\omega t))^2 \int_0^L \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr dz$$

$$P_{dis} = \frac{\sigma_c \pi R^4 L}{8} (\mu_0 m I_0 \omega \sin(\omega t))^2$$

c) El hecho de tener un conductor al interior, el campo eléctrico inducido hará que exista una corriente (ley de Ohm) el cual al ser variable, inducirá nuevamente un campo magnético que se opone al campo magnético calculado anteriormente.

Problema 17

El flujo del campo magnético con respecto a la espira tendrá la forma:

$$\Phi = \vec{B} \pi a^2 \cdot \hat{n} = B \pi a^2 \cos(\omega t)$$

Luego la f.e.m inducida en la espira tendrá una forma sinusoidal:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B\pi a^2 \omega \sin(\omega t)$$

Los aportes resistivos al voltaje serán $V = IR$ mientras que los aportes de la inductancia son $V = LI\dot{I}$, todo esto junto nos dá la siguiente ecuación diferencial:

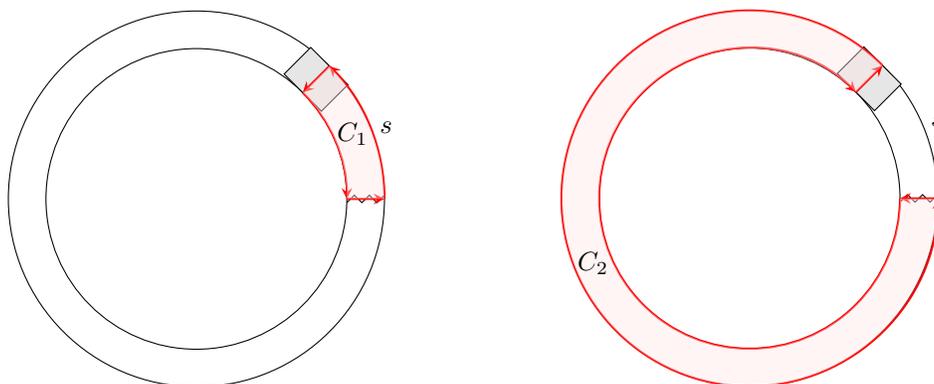
$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{B\pi a^2 \omega}{L} \sin(\omega t)$$

La solución homogénea es una exponencial que decae en el tiempo, mientras que la particular será:

$$I(t) = \frac{B\pi a^2 \omega}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t))$$

Que también tendrá una forma sinusoidal pero desfasada de la f.e.m. Notemos finalmente que cuando la frecuencia tiende a cero la corriente también mientras que si se va a infinito se mantiene acotada.

Problema 18



Los rieles conductores forman un gran círculo por lo que en la escala del vehículo los rieles son prácticamente paralelos. Luego de que el vehículo ha recorrido un tramo s por el riel con respecto a la resistencia, el flujo de campo magnético a través del circuito 1 del dibujo es

$$\Phi_1 = B_0 L s$$

mientras que el flujo de campo magnético a través del circuito 2 resulta

$$\Phi_2 = B_0 L (P - (s - nP)) = B_0 L ((n + 1)P - s)$$

para $nP < s < (n + 1)P$ con P el perímetro del círculo y n un número entero no negativo. De todos modos todas estas constantes son irrelevantes ya que la tasa de cambio de flujo magnético resulta

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= B_0 L \dot{s} \\ \dot{\Phi}_2 &= -B_0 L \dot{s} \end{aligned}$$

La f.e.m inducida en cada circuito es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -B_0 L \dot{s} \\ \mathcal{E}_2 &= B_0 L \dot{s} \end{aligned}$$

Luego, la f.e.m a través de la resistencia es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 2B_0 L \dot{s}$$

por lo que la corriente resulta $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2B_0L\dot{s}}{R}$. Esta corriente retorna por el vehículo metálico según \hat{r} el cual experimenta una fuerza debida al campo magnético

$$\vec{F}_m = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B} = ILB_0(\hat{r} \times \hat{z}) = -ILB_0\hat{\theta}$$

Con esta fuerza y la fuerza de empuje del vehículo $F_0\hat{\theta}$ se obtiene la ecuación de movimiento para s

$$m\ddot{s} = F_0 - \frac{2B_0^2L^2}{R}\dot{s}$$

Resolviendo para \dot{s} se tiene de forma general

$$\dot{s}(t) = \frac{F_0R}{2B_0^2L^2} + C \exp\left(-\frac{2B_0^2L^2}{mR}t\right)$$

Si en $t = 0$ la velocidad del vehículo es v_0 entonces

$$\dot{s}(t) = v_0 e^{-\frac{2B_0^2L^2}{mR}t} + \frac{F_0R}{2B_0^2L^2} \left(1 - e^{-\frac{2B_0^2L^2}{mR}t}\right)$$

Por lo que la corriente finalmente resulta

$$I(t) = \frac{2B_0Lv_0}{R} e^{-\frac{2B_0^2L^2}{mR}t} + \frac{F_0}{B_0L} \left(1 - e^{-\frac{2B_0^2L^2}{mR}t}\right)$$

Corresponde a una corriente que comienza en $\frac{2B_0Lv_0}{R}$ y luego crece/decrece exponencialmente si $\frac{2B_0Lv_0}{R}$ es menor/mayor que $\frac{F_0}{B_0L}$ y tiende asintóticamente hacia el valor $\frac{F_0}{B_0L}$. Este crecimiento/decrecimiento viene dominado por la constante de tiempo $\tau = \frac{mR}{2B_0^2L^2}$. Su grafico se presenta abajo (en el caso de un crecimiento)

