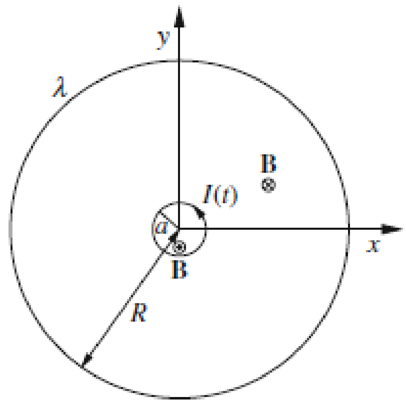
Sol. P26
C. Zenteno
09 de Diciembre de 2020

PROBLEMA 26



Un anillo no conductor de radio R esta en reposo en el plano $x-y$, con su centro en el origen del sistema coordenado. El anillo tiene masa m, grosor despreciable y carga eléctrica Q distribuida uniformemente en el. El anillo es libre de rotar sin roce en torno a su eje.

Un anillo circular superconductor de radio $a \ll R$, cuyo eje coincide con el anillo cargado y que lleva una corriente I_0, también se ubica en el plano $x-y$ como se muestra en la figura. En un tiempo $t=0$ el aro superconductor es calentado por sobre su temperatura crítica, perdiendo su conductividad normal. Por consecuencia de esto, su corriente decae a cero de acuerdo a $I = I(t)$

a) Ignorando los efectos auto-inductivos, evaluar la velocidad angular $\omega = \omega(t)$ del anillo cargado como función de la corriente $I(t)$ del anillo pequeño. Evaluar la velocidad angular final ω_f, y el momentum angular final L_f del anillo cargado.

b) Evaluar el campo magnético al centro del anillo, $\vec{B}_c$ generado por la rotación del anillo.

Extra [Sin puntaje] c) Discuta como cambiarían los resultados de a) si tomáramos en consideración la inductancia propia $\mathcal{L}$ del anillo cargado.

Solución
a) En primer lugar calculamos el flujo que siente el anillo de radio R debido al campo magnético que genera el anillo más pequeño. El momento magnético que esta genera es:

$$\vec{m} = I(t)\pi a^2 \hat{z}$$

Luego, como $a \ll R$ podemos asumir que el campo que fluye a través del anillo más grande es el generado por el dipolo magnético, o sea, tendrá la forma de:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\hat{r}(\vec{m}\cdot\hat{r}) - \vec{m}}{r^3}\right]$$

Calculamos el flujo a partir del segundo término de la expresión (el primero es perpendicular a la superficie)

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^R \frac{I(t)\pi a^2}{r^3} r dr d\theta (\hat{z} \cdot \hat{z}) = -\frac{\mu_0 \pi a^2 I(t)}{2} \int_a^R \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 \pi a^2 I(t)}{2R}$$

En la última integral, despreciamos el otro límite ya que $a \ll R$. A partir de este flujo podemos calcular el campo eléctrico que hay en el aro cargado, que por la simetría del problema fluirá en la dirección azimutal $\hat{\theta}$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \Phi$$

$$\Rightarrow E\, 2\pi R = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2R} \partial_t I(t)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\mu_0 a^2}{4R^2} \partial_t I(t) \hat{\theta}$$

La fuerza que ejerce este campo eléctrico por sobre una sección infinitesimal de densidad de carga lineal λ en el anillo será:

$$d\vec{f} = \lambda \vec{E} \cdot dl = \lambda \vec{E} \cdot (R d\theta) = -\frac{\mu_0 a^2 \lambda}{4R} \partial_t I(t) d\theta \hat{\theta}$$

Mientras que el torque total lo obtenemos integrando en todo el aro de radio R los torques infinitesimales generados por la fuerza $d\vec{f}$

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{f} = -\frac{\mu_0 a^2 \lambda}{4R} \partial_t I(t) \int_0^{2\pi} (R\hat{r}) \times (d\theta \hat{\theta}) = -\frac{\mu_0 \pi a^2 \lambda}{2} \partial_t I(t) \hat{z}$$

Si la inercia en torno al eje, de un aro de radio R y masa m está dado por $I_{zz} = mR^2$, la ecuación de torque $\vec{\tau} = \dot{L}$ nos dará la siguiente ecuación de movimiento para la velocidad angular:

$$mR^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 \lambda}{2} \partial_t I(t)$$

que podemos integrar usando el teorema fundamental del cálculo

$$\omega(t) = -\frac{\mu_0 \pi a^2 \lambda}{2mR^2} \int_0^t \partial_t I(t) dt = \frac{\mu_0 \pi a^2 \lambda}{2mR^2} [I_0 - I(t)]$$

Si la corriente final es cero $I_f = 0$, la velocidad angular estará dada por:

$$\omega_f = \frac{\mu_0 \pi a^2 \lambda}{2mR^2} I_0$$

Y el momento angular asociado a esta velocidad angular es $L_f = mR^2 \omega_f$

$$L_f = \frac{\mu_0 \pi a^2 \lambda}{2} I_0$$

b) La corriente que fluye por el anillo más grande debido a su rotación será: $I_{rot} = \lambda R \omega$. Por lo que luego de que la corriente del anillo más pequeño se apaga, el aro más grande continua girando, generando un campo magnético, que en su centro estará dado por:

$$\vec{B} = \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_{rot}}{2R} = \frac{\mu_0^2 \lambda^2 a^2}{16mR^2} I_0 \hat{z}$$