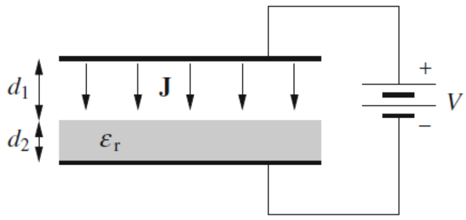
FI 2002-02 ELECTROMAGNETISMO

Sol. P17
C. Zenteno
03 de Noviembre de 2020

PROBLEMA 17

Cada placa de un condensador de placas paralelas tiene una superficie S y separación d. El espacio entre las placas está dividido en dos capas, de grosor d_1 y d_2 respectivamente, con $d_1+d_2 = d$. La capa de grosor d_1 está rellena con un gas de constante dieléctrica equivalente al vacío, mientras que la capa de grosor d_2 está rellena de un material con permitividad eléctrica ε_r. La diferencia de potencial entre las placas es V y se mantiene constante por una fuente externa.



a) Encuentre el campo eléctrico adentro del condensador.
Una descarga ionizante comienza en la capa llena de gas en $t = 0$ y éste comienza a ser un conductor. Asumimos para aquello que, en $t > 0$, el gas ionizado puede ser considerado como un conductor Óhmico de resistividad constante y uniforme ρ
b) Luego de un tiempo suficientemente largo, observamos que la corriente deja de fluir en el gas, y el sistema llega a un estado estacionario (o sea, todas las cantidades físicas son constantes). Encuentre el campo eléctrico en estas condiciones y la densidad de carga libre entre las dos capas.
c) Encuentre la dependencia del tiempo del campo eléctrico en la fase transiente ($t > 0$), y el tiempo de relajación que necesitó el sistema para llegar al estado estacionario.

Solución
a) En primer lugar definimos que en la zona del gas habrá un campo eléctrico E_1 y en la zona del material, habrá un campo eléctrico E_2 (ambos constantes por ley de Gauss). Luego, a partir del potencial tenemos una ecuación que combina ambos campos

$$V = E_1 d1 + E_2 d2 \tag{1}$$

Por otro lado, tenemos la condición de borde para la interfaz dieléctrico-gas, $D_2 - D_1 = \sigma_l$, con σ_l la densidad de carga libre acumulada en la interfaz. Como en la condición inicial no hay carga libre en esa zona, tenemos una segunda ecuación que conecta los campos eléctricos:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 \\ \Rightarrow \varepsilon_0 E_1 &= \varepsilon_r E_2 \end{aligned} \tag{2}$$

De las dos ecuaciones anteriores despejamos los campos

$$\boxed{E_1 = \frac{V}{d_1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r} d_2}} \qquad \boxed{E_2 = \frac{V}{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} d_1 + d_2}}$$

b) En el estado estacionario no hay corriente por el gas (debido a que ya se acumuló la suficiente cantidad de carga en la interfaz). Esto quiere decir que según la ley de Ohm donde $J_1 = E_1/\rho$ el campo en la zona del gas debe ser cero, pero la ecuación (1) sigue siendo válida, por lo que se concluye que:

$$\boxed{E_2 = \frac{V}{d_2}}$$

Luego, como hay carga en la interfaz, se cumple la condición de borde con la densidad de carga libre

$$D_2 - D_1 = \sigma_l \tag{3}$$

Por lo que en este caso, reemplazando $E_1 = 0$ y E_2 de la ecuación pasada, llegamos a:

$$\boxed{\sigma_l = \frac{\varepsilon_r V}{d_2}}$$

c) En la fase transiente, tendremos corrientes fluyendo por el gas y estas corrientes se relacionarán con las cargas que se están acumulando en la interfaz con la ecuación de continuidad.

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \vec{J}$$

Como la corriente fluye paralela al campo eléctrico (hacia abajo), e integramos en el volumen para poder expresar todo como función de σ_l y el campo eléctrico.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J}_1 \qquad \Big/ \int d\mathcal{V} \\ &= \partial_t (S\sigma_l) + \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} \\ &= S\partial_t \sigma_l - SJ_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_t \sigma_l = \frac{E_1}{\rho}$$

Usamos ahora la ecuación (3) de la parte anterior

$$\varepsilon_0 E_1 - \varepsilon_r E_2 = \sigma_l$$

Que, en conjunto con la ecuación (1) del potencial, tenemos una ecuación para despejar el campo eléctrico en función de σ_l

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E_1 &= \varepsilon_r \left(\frac{V}{d_2} - \frac{d_1 E_1}{d_2} \right) - \sigma_l \\ \Rightarrow E_1 &= \frac{\varepsilon_r V}{\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon_r d_1} - \frac{\sigma_l d_2}{\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon_r d_1} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad, tenemos una ecuación diferencial para σ_l

$$\partial_t \sigma_l = \frac{\varepsilon_r V}{\rho(\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon_r d_1)} - \frac{\sigma_l d_2}{\rho(\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon_r d_1)}$$

Cuya solución debe calzar con la solución estacionaria cuando $t \gg 0$. La solución es:

$$\boxed{\sigma_l = \frac{\varepsilon_r V}{d_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad , \quad \tau = \frac{\rho(\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon_r d_1)}{d_2}$$

Con τ tiempo característico del sistema, por lo general los tiempos de relajación se aproximan a $t = 5\tau$.
Finalmente, reemplazamos esta solución en el campo eléctrico para obtener su dependencia temporal:

$$\boxed{E_1 = -\frac{\varepsilon_r V}{\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon_r d_1} e^{-t/\tau}}$$