FI 2002-02 ELECTROMAGNETISMO

Sol. P6
C. Zenteno
28 de septiembre de 2020

PROBLEMA 6

Calcular la energía electrostática almacenada en una distribución de carga uniforme ρ que ocupa un volumen esférico de radio R.

La energía electrostática de una distribución está dada por la integral en todo el espacio del cuadrado del campo eléctrico:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int\int\int E^2 d\mathcal{V}$$

Calculamos el campo, tanto dentro como afuera de la esfera, usando la ley de Gauss:

<u>$r > R$</u>|

$$\int\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\cancelto{1}{(\hat{r}\cdot\hat{r})} r^2 sen(\theta) d\theta d\phi = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{R^3 \rho}{3r^2 \varepsilon_0} \tag{4}$$

<u>$r < R$</u>|

$$\int\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\cancelto{1}{(\hat{r}\cdot\hat{r})} r^2 sen(\theta) d\theta d\phi = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \tag{6}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \tag{7}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0} \tag{8}$$

Entonces, el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r < R \\ \frac{R^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r} & r > R \end{cases} \tag{9}$$

Ahora nos queda calcular la energía electrostática directamente:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int\int\int E^2 d\mathcal{V} \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} E^2 r^2 sen(\theta) dr d\theta d\phi \\
&= \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}}\cancel{4}^{2}\pi\int_0^{\infty} E^2 r^2 dr \\
&= 2\varepsilon_0\pi\left[\int_0^{R}(E_{r<R})^2 r^2 dr + \int_R^{\infty}(E_{r>R})^2 r^2 dr\right] \\
&= 2\varepsilon_0\pi\left[\int_0^{R}\left(\frac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r}\right)^2 r^2 dr + \int_R^{\infty}\left(\frac{R^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r}\right)^2 r^2 dr\right] \\
&= 2\cancel{\varepsilon_0}\pi\frac{\rho^2}{9\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\left[\int_0^{R} r^2 r^2 dr + \int_R^{\infty}\left(\frac{R^6}{r^4}\right) r^2 dr\right] \\
&= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left[\int_0^{R} r^4 dr + R^6\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}dr\right] \\
&= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left[\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{R} + R^6\left[\frac{-1}{r}\right]_R^{\infty}\right] \\
&= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left[\frac{R^5}{5} + R^{\cancel{6}\,5}\frac{1}{\cancel{R}}\right] \\
&= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\frac{6R^5}{5}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\boxed{U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}} \tag{11}$$

Observación: Si usamos la carga total de la esfera $\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$

$$\begin{aligned} U &= \frac{12\pi\left(\frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}\right)^2 R^5}{45\varepsilon_0} \\ &= \frac{12\pi Q^2 R^5}{\frac{16\pi^2 R^6}{9} 45\varepsilon_0} \\ &= \frac{3Q^2}{20\pi R\varepsilon_0} \\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R} \end{aligned}$$