FM1100-8: Introducción a la Física Moderna.
Profesores: C. Fuentes.
Auxiliares: F. Kaschel, E. Rosas, C. Gallegos.

Pauta Ejercicio 3

a) Recordemos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Ahora, para demostrar que la función $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$ soluciona la ecuación de onda, debemos calcular las derivadas parciales:

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\phi) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = Ak\cos(kx-\omega t+\phi) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2\sin(kx-\omega t+\phi)$$

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\phi) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\cos(kx-\omega t+\phi) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin(kx-\omega t+\phi)$$

Por lo que es claro que $y(x,t)$ satisfase la ecuación de onda con $v^2 = k^2/\omega^2$.

Otra forma de demostrar que es solución es reescribir,

$$y(x,t) = A\sin\left(k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) + \phi\right). \tag{2}$$

Como la función tiene la forma de una onda propagativa $y(x,t) = f(x - vt)$, con $v = \omega/k$ y, es conocido de cátedra que esta clase de funciones son soluciones a la ecuación de onda, es inmediato que $y(x,t)$ satisfase también la ecuación de onda.

Por último, si $k/\omega > 0$ la onda va a la derecha en $+\hat{x}$ y en el caso contrario va hacia la izquierda en $-\hat{x}$. Esto es una generalización, ya que a priori no conocemos qué representa cada parámetro y por lo tanto tampoco si son positivos o negativos. *Obs: No hay descuentos si asumieron k y ω positivos.*

b) Para determinar el valor de la longitud de onda λ había que fijarse en la Figura 1 y estimar el valor de el intervalo en rojo (o cualquiera que fuera análogo).

$$\lambda \approx 3\,(m). \tag{3}$$

De la misma manera, para determinar el periodo T había que fijarse en la Figura 2 y estimar el valor de el intervalo en morado (o cualquiera que fuera análogo).

$$T \approx 2\,(s). \tag{4}$$

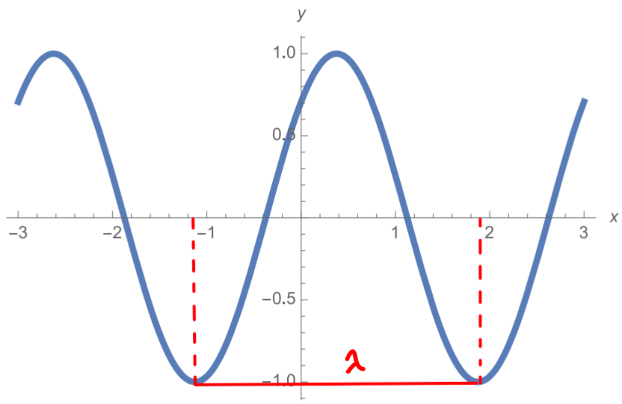

Figura 1: Forma de la cuerda para $y(x, t = 0)$.

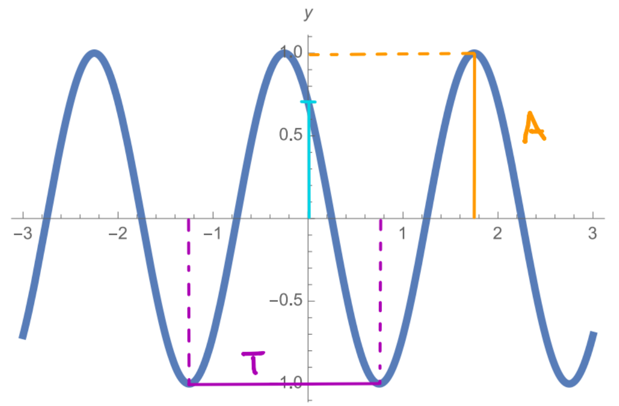

Figura 2: Forma de la cuerda para $y(x = 0, t)$.

c) El valor de k y ω se obtienen a partir de la parte anterior y, aproximando el valor de π se podía obtener una expresión numérica para las cantidades:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 2\,(rad/m), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 3\,(rad/s). \tag{5}$$

Para obtener ϕ había que determinar en primer lugar el valor de A, el cual se podía estimar en la Figura 2 (color naranjo) o en la Figura 1 (sería la misma recta).

$$A \approx 1\,(m) \tag{6}$$

Luego, la idea consistía en evaluar la función de onda en puntos conocidos para despejar ϕ. En este caso, en la Figura 2 se planteó de $y(x = 0, t = 0)$ que alcanzaría un valor numérico y_0 (el cual también había que estimar). Así,

$$y(x = 0, t = 0) = y_0 = A\sin(k \times 0 - \omega \times 0 + \phi) = A\sin(\phi)$$
$$\Rightarrow A \approx 1\,(m),\; y_0 \approx 0{,}7\,(m) \;\Rightarrow\; \sin(\phi) \approx 0{,}7$$

$$\Rightarrow \phi \approx \frac{\pi}{4}\,(rad). \tag{7}$$

d) Nuevamente, por definición calculamos la velocidad y utilizamos los valores conocidos por las partes anteriores,

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\omega}{k}\hat{x} \Rightarrow \vec{v} \approx 1{,}5\hat{x}\,(m/s). \tag{8}$$

El módulo de la tensión se despeja a partir de la expresión del enunciado. Como μ se encuentra en las unidades que estamos trabajando, reemplazamos directamente:

$$T = \mu v^2 = 0{,}1 \times 1{,}5^2\,(N) \approx 0{,}23\,(N). \tag{9}$$