YOUNG • FREEDMAN

SEARS • ZEMANSKY

FÍSICA UNIVERSITARIA

VOLUMEN 1

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in
1 cm = 0.3937 in
1 in. = 2.540 cm
1 ft = 30.48 cm
1 yd = 91.44 cm
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milla náutica = 6080 ft
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área
1 cm^2 = 0.155 in^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft = 144 in^2 = 0.0929 m^2

Volumen
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0.03531 ft^3 = 61.02 in^3
1 ft^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros

Tiempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86,400 s
1 año = 365.24 d = 3.156×10^7 s

Ángulo
1 rad = 57.30° = 180°/π
1° = 0.01745 rad = π/180 rad
1 revolución = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Rapidez
1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 ft/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 furlong/14 días = 1.662×10^{-4} m/s

Aceleración
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3.281 ft/s^2
1 cm/s^2 = 0.01 m/s^2 = 0.03281 ft/s^2
1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2 = 30.48 cm/s^2
1 mi/h · s = 1.467 ft/s^2

Masa
1 kg = 10^3 g = 0.0685 slug
1 g = 6.85×10^{-5} slug
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.661×10^{-27} kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando g = 9.80 m/s^2

Fuerza
1 N = 10^5 dinas = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N = 4.448×10^5 dinas

Presión
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.450×10^{-4}lb/in^2 = 0.209 lb/ft^2
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/in^2 = 6895 Pa
1 lb/ft^2 = 47.88 Pa
1 atm = 1.013×10^5 Pa = 1.013 bar
= 14.7 lb/in^2 = 2117 lb/ft^2
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

Energía
1 J = 10^7ergs = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J (con base en caloría de 15°)
1 ft · lb = 1.356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 ft · lb
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.600×10^6 J

Equivalencia masa-energía
1 kg $\leftrightarrow$ 8.988×10^{16} J
1 u $\leftrightarrow$ 931.5 MeV
1 eV $\leftrightarrow$ 1.074×10^{-9} u

Potencia
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz	c	2.99792458×10^{8} m/s
Magnitud de carga del electrón	e	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6.6742(10) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
Constante de Planck	h	$6.6260693(11) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Constante de Boltzmann	k	$1.3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	$8.314472(15)\ \mathrm{J/mol \cdot K}$
Masa del electrón	m_e	$9.1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.67262171(29) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.67492728(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A \cdot m}$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817 \ldots \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787 \ldots \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

Otras constante útiles

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (15° caloría)
Presión atmosférica estándar	1 atm	1.01325×10^{5} Pa
Cero absoluto	0 K	-273.15 °C
Electrón volt	1 eV	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	0.510998918(44) MeV
Volumen del gas ideal (0 °C y 1 atm)		22.413996(39) litros/mol
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	$9.80665\ \mathrm{m/s^2}$

Fuente:* National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/cuu**). Los números entre paréntesis indican incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores que no indican incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos†

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)	Periodo de la órbita
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^{6}	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^{6}	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^{7}	7.78×10^{11}	11.86 y
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^{7}	1.43×10^{12}	29.45 y
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^{7}	2.87×10^{12}	84.02 y
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^{7}	4.50×10^{12}	164.8 y
Plutón‡	1.31×10^{22}	1.15×10^{6}	5.91×10^{12}	247.9 y

†*Fuente:* NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jlp.nasa.gov**) y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, "radio" es el radio en su ecuador y "radio de la órbita" es la distancia media desde el Sol (en el caso de los planetas) o desde la Tierra (en el caso de la Luna).

‡En agosto de 2006 la Unión Astronómica Internacional reclasificó a Plutón y a otros pequeños objetos que giran en órbita alrededor del Sol como "planetas enanos".

CONTENIDO BREVE

Mecánica

Ondas/Acústica

Termodinámica

APÉNDICES

ONDAS MECÁNICAS

15

?Después de un terremoto, las noticias del suceso viajan por la masa del planeta en forma de ondas sísmicas. ¿Qué aspectos de una onda sísmica determinan la magnitud de la potencia que transporta la onda?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué se entiende por onda mecánica y cuáles son las diferentes variedades de éstas.
- Cómo utilizar la relación entre rapidez, frecuencia y longitud de onda para una onda periódica.
- Cómo interpretar y utilizar la expresión matemática para una onda periódica senoidal.
- Cómo calcular la rapidez de las ondas en una cuerda.
- Cómo calcular la rapidez con la que una onda mecánica transporta energía.
- Qué sucede cuando las ondas mecánicas se traslapan y se interfieren entre sí.
- Las propiedades de las ondas estacionarias sobre una cuerda y cómo analizar tales ondas.
- Cómo los instrumentos de cuerda producen sonidos de frecuencias específicas.

Los rizos en un estanque, los sonidos musicales, los temblores sísmicos producidos por un terremoto: todos éstos son fenómenos *ondulatorios*. Las ondas surgen siempre que un sistema es perturbado de su posición de equilibrio y la perturbación puede viajar o *propagarse* de una región del sistema a otra. Al propagarse una onda, transporta energía. La energía de las ondas de la luz solar calienta la superficie terrestre; en tanto que la energía de las ondas sísmicas puede resquebrajar la corteza terrestre.

Este capítulo y el siguiente tratan las ondas mecánicas, ondas que viajan por algún material llamado *medio*. (El capítulo 16 se ocupa del sonido, que es un tipo importante de onda mecánica.) Iniciaremos deduciendo las ecuaciones básicas que describen a las ondas, incluido el importante caso especial de las ondas *senoidales* donde el patrón de la onda es una función seno o coseno que se repite. Para entender mejor las ondas en general, examinaremos el caso sencillo de las ondas que viajan por una cuerda estirada.

Las ondas en las cuerdas desempeñan un papel importante en música. Cuando un músico toca una guitarra o un violín, produce ondas que viajan en direcciones opuestas por las cuerdas del instrumento. Al traslaparse estas ondas de dirección opuesta, se genera *interferencia*. Descubriremos que, en una cuerda de guitarra o de violín, sólo pueden darse ondas senoidales de ciertas frecuencias especiales, llamadas *frecuencias de modo normal*, determinadas por las propiedades de la cuerda. Las frecuencias de modo normal de los instrumentos de cuerda determinan el tono de los sonidos musicales que se producen. (En el próximo capítulo veremos que la interferencia también ayuda a explicar los tonos de los instrumentos de *viento*, como las flautas y los órganos.)

No todas las ondas son mecánicas. Las ondas *electromagnéticas* —que incluyen la luz, las ondas de radio, las radiaciones infrarrojas y ultravioleta, y los rayos X— se pueden propagar incluso en el espacio vacío, donde *no* hay un medio. Exploraremos éstas y otras ondas no mecánicas en capítulos posteriores.

ActivPhysics ONLINE

10.1 Propiedades de las ondas mecánicas

15.1 Tipos de ondas mecánicas

Una **onda mecánica** es una perturbación que viaja por un material o una sustancia que es el **medio** de la onda. Al viajar la onda por el medio, las partículas que constituyen el medio sufren desplazamientos de varios tipos, dependiendo de la naturaleza de la onda.

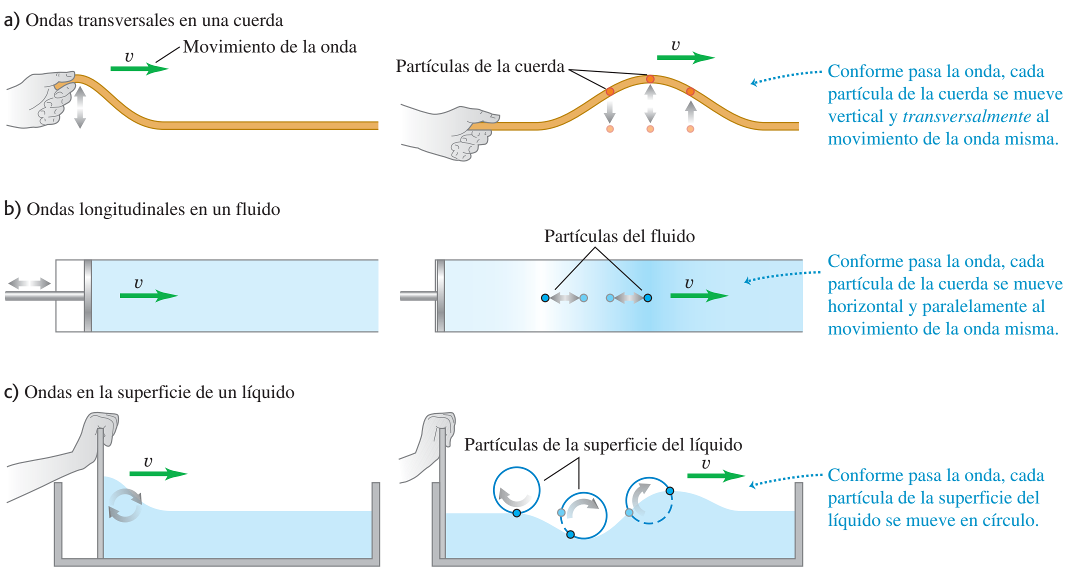
La figura 15.1 muestra tres variedades de ondas mecánicas. En la figura 15.1a, el medio es una cuerda tensada. Si imprimimos al extremo izquierdo una ligera sacudida hacia arriba, la sacudida viaja a lo largo de la cuerda. Secciones sucesivas de la cuerda repiten el movimiento que dimos al extremo, pero en instantes posteriores sucesivos. Puesto que los desplazamientos del medio son perpendiculares o *transversales* a la dirección en que la onda viaja por el medio, decimos que se trata de una **onda transversal**.

En la figura 15.1b, el medio es un líquido o un gas en un tubo con una pared rígida en el extremo derecho y un pistón móvil en el izquierdo. Si imprimimos al pistón un solo movimiento hacia adelante y hacia atrás, el desplazamiento y las fluctuaciones de presión viajarán a lo largo del medio. En esta ocasión, los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la *misma* línea en que viaja la onda, y decimos que se trata de una **onda longitudinal**.

En la figura 15.1c, el medio es líquido en un canal, como agua en una zanja de irrigación. Si movemos la tabla plana de la izquierda hacia adelante y hacia atrás una vez, una perturbación de onda viajará a lo largo del canal. En este caso, los desplazamientos del agua tienen componentes *tanto* longitudinal *como* transversal.

Cada uno de estos sistemas tiene un estado de equilibrio. En el caso de la cuerda estirada, es el estado en que el sistema está en reposo, estirada en línea recta. Para el fluido en un tubo, es un estado en que el fluido está en reposo con presión uniforme; y para el agua en una zanja, es una superficie lisa y plana. En cada caso, el movimiento ondulatorio es una perturbación del estado de equilibrio que viaja de una región del medio a otra, y siempre hay fuerzas que tienden a volver el sistema a su posición de equilibrio cuando se le desplaza, así como la gravedad tiende a llevar un péndulo hacia su posición de equilibrio vertical cuando se le desplaza.

15.1 Tres formas de producir una onda que se mueve hacia la derecha. a) La mano mueve la cuerda hacia arriba y regresa, produciendo una onda transversal. b) El pistón se mueve a la derecha, comprimiendo el líquido o gas, y regresa, produciendo una onda longitudinal. c) La tabla se mueve a la derecha y regresa, produciendo una combinación de ondas longitudinales y transversales.



Estos ejemplos tienen tres cosas en común. Primera, la perturbación siempre viaja o *se propaga* por el medio con una rapidez definida llamada rapidez de propagación o, simplemente, **rapidez de la onda**, determinada en cada caso por las propiedades mecánicas del medio. Usaremos el símbolo v para esta rapidez. (La rapidez de la onda *no* es la rapidez con que se mueven las partículas cuando son perturbadas por la onda. Volveremos a esto en la sección 15.3.) Segunda, el medio mismo no viaja por el espacio; sus partículas individuales realizan movimientos verticales y horizontales alrededor de sus posiciones de equilibrio. Lo que viaja es el patrón general de la perturbación ondulatoria. Tercera, para poner en movimiento cualesquiera de estos sistemas, debemos aportar energía realizando trabajo mecánico sobre el sistema. La onda transporta esta energía de una región del medio a otra. *Las ondas transportan energía, pero no materia, de una región a otra* (figura 15.2).

15.2 "Haciendo la ola" en un estadio deportivo es un ejemplo de onda mecánica: la perturbación propaga en la multitud, pero no transporta materia (ninguno de los espectadores se mueve de un asiento a otro).

Evalúe su comprensión de la sección 15.1 ¿Qué tipo de onda es "la ola" que se muestra en la figura 15.2? i) transversal; ii) longitudinal; iii) una combinación de transversal y longitudinal.

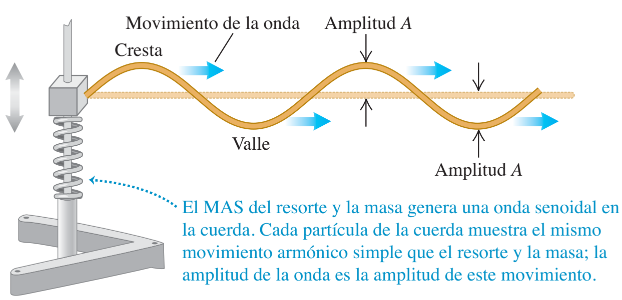
15.2 Ondas periódicas

La onda transversal en una cuerda estirada de la figura 15.1a es un ejemplo de *un pulso de onda*. La mano sacude la cuerda verticalmente una vez, ejerciendo una fuerza transversal sobre ella. El resultado es un solo pulso que viaja a lo largo de la cuerda. La tensión de la cuerda restablece su forma recta una vez que el pulso ha pasado.

Se da una situación más interesante cuando imprimimos un movimiento repetitivo, *o periódico* al extremo libre de la cuerda. (Tal vez el lector desee repasar la explicación del movimiento periódico del capítulo 13 antes de continuar.) Entonces, cada partícula de la cuerda tendrá un movimiento periódico al propagarse la onda, y tendremos una **onda periódica**.

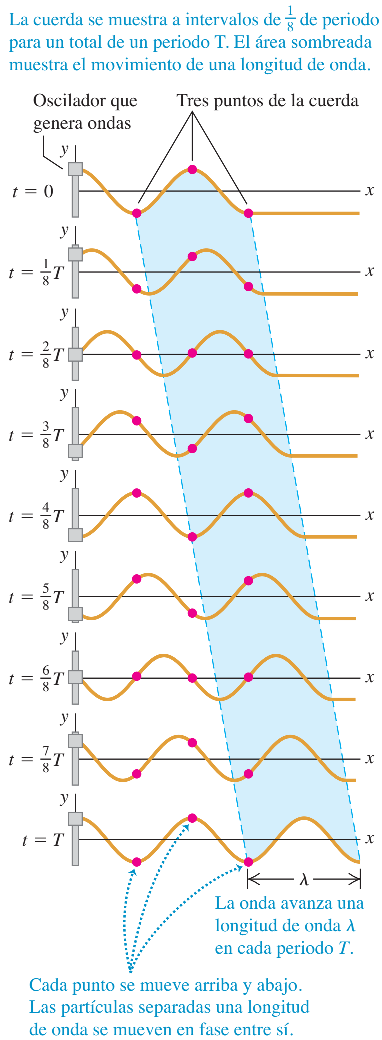
Ondas transversales periódicas

En particular, suponga que movemos verticalmente la cuerda con un *movimiento armónico simple* (MAS) con amplitud A, frecuencia f, frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, y periodo $T = 1/f = 2\pi/\omega$. En la figura 15.3 se muestra una forma de hacerlo. La onda producida es una sucesión simétrica de *crestas* y *valles*. Como veremos, las ondas periódicas con movimiento armónico simple son especialmente fáciles de analizar; las llamamos **ondas senoidales**. Resulta también que *cualquier* onda periódica puede representarse como una combinación de ondas senoidales. Por lo tanto, este tipo de movimiento ondulatorio merece atención especial.



15.3 Un bloque con masa m unido a un resorte tiene un movimiento armónico simple y produce una onda senoidal que viaja a la derecha por la cuerda. (En un sistema real, se tendría que aplicar una fuerza impulsora al bloque para reponer la energía que la onda se lleva.)

15.4 Onda senoidal transversal que viaja a la derecha por una cuerda. La escala vertical está exagerada.



15.5 Una serie de gotas que cae en agua produce una onda periódica que se extiende radialmente hacia afuera. Las crestas y los valles de la onda son círculos concéntricos. La longitud de onda λ es la distancia radial entre crestas adyacentes o valles adyacentes.

En la figura 15.3, la onda que avanza por la cuerda es una *sucesión continua* de perturbaciones senoidales transversales. La figura 15.4 muestra la forma de una parte de la cuerda cerca del extremo izquierdo a intervalos de $\frac{1}{8}$ de periodo, para un tiempo total de un periodo. La forma de onda avanza uniformemente hacia la derecha, como indica el área sombreada. Al moverse la onda, cualquier punto de la cuerda (cualquiera de los puntos rojos, por ejemplo) oscila verticalmente alrededor de su posición de equilibrio con movimiento armónico simple. *Cuando una onda senoidal pasa por un medio, todas las partículas del medio sufren movimiento armónico simple con la misma frecuencia*.

CUIDADO **Movimiento ondulatorio contra movimiento de partículas** No confunda el movimiento de la *onda transversal* a lo largo de la cuerda con el de una *partícula* de la cuerda. La onda avanza con rapidez constante v *a lo largo* de la cuerda; mientras que el movimiento de la partícula es armónico simple y *transversal* (perpendicular) a la longitud de la cuerda.

En el caso de una onda periódica, la forma de la cuerda en cualquier instante es un patrón repetitivo. La longitud de un patrón de onda completo es la distancia entre una cresta y la siguiente, o de un valle al siguiente, o de cualquier punto al punto correspondiente en la siguiente repetición de la forma. Llamamos a esta distancia **longitud de onda**, denotada con λ (la letra griega lambda). El patrón de onda viaja con rapidez constante v y avanza una longitud de onda λ en el lapso de un periodo T. Por lo tanto, la rapidez de la onda v está dada por $v = \lambda/T$, dado que $f = 1/T$,

$$v = \lambda f \qquad \text{(onda periódica)} \qquad (15.1)$$

La rapidez de propagación es igual al producto de la longitud de onda y la frecuencia. La frecuencia es una propiedad de *toda* la onda periódica, porque todos los puntos de la cuerda oscilan con la misma frecuencia f.

Las ondas en una cuerda se propagan en una sola dimensión (en la figura 15.4, a lo largo del eje x). No obstante, los conceptos de frecuencia, longitud de onda y amplitud son igualmente aplicables a las ondas que se propagan en dos o en tres dimensiones. La figura 15.5 muestra una onda que se propaga en dos dimensiones en la superficie de un tanque de agua. Igual que en las ondas de una cuerda, la longitud de onda es la distancia entre una cresta y la siguiente, y la amplitud es la altura de una cresta sobre el nivel de equilibrio.

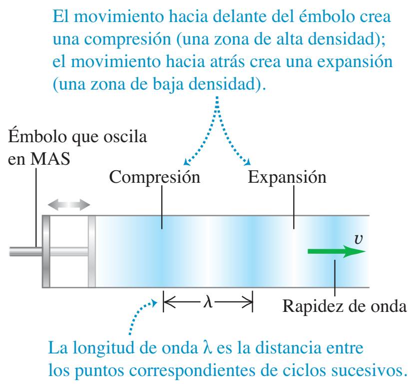
En muchas situaciones importantes, que incluyen las ondas en cuerdas, la rapidez de la onda v depende únicamente de las propiedades mecánicas del medio. En este caso, aumentar f hace que λ disminuya, de modo que el producto $v = \lambda f$ no cambie, y las ondas de *todas* las frecuencias se propagan con la misma rapidez. En este capítulo, *sólo* consideraremos las ondas de este tipo. (En capítulos posteriores estudiaremos la propagación de las ondas de luz en sustancias en las cuales la rapidez de la onda depende de la frecuencia; ésta es la razón por la que los prismas descomponen la luz blanca en un espectro y por la que las gotas de lluvia crean un arco iris.)

Ondas periódicas longitudinales

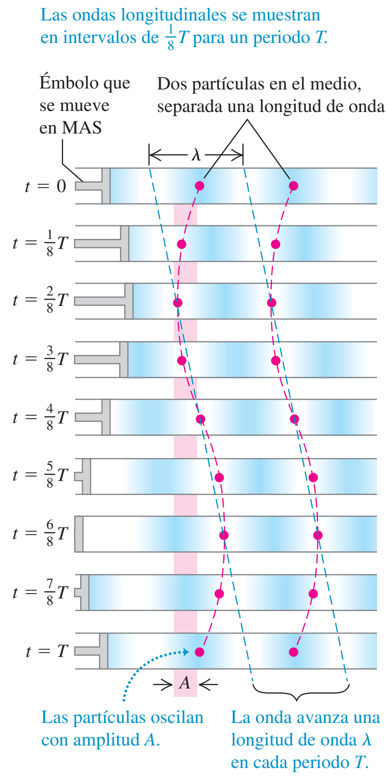
Para entender la mecánica de una onda periódica *longitudinal*, consideramos un tubo largo lleno con un fluido, con un pistón en el extremo izquierdo como en la figura 15.1b. Si empujamos el pistón, comprimimos el fluido cerca de él, aumentando la presión en esta región. Luego, esta región empuja la región vecina de fluido, y así sucesivamente, de modo que un pulso de onda viaja por el tubo.

Suponga ahora que movemos el pistón con un movimiento armónico simple a lo largo de una línea paralela al eje del tubo (figura 15.6). Este movimiento forma regiones en el fluido donde la presión y la densidad son mayores o menores que los valores de equilibrio. Llamamos *compresión* a una región donde se ha aumentado la densidad; y *expansión*, a una donde se ha reducido. En la figura 15.6 se muestran las compresiones con regiones oscuras y las expansiones con regiones claras. La longitud de onda es la distancia de una compresión a la siguiente o de una expansión a la siguiente.

15.6 Uso de un pistón que oscila para hacer una onda longitudinal senoidal en un fluido.



15.7 Onda senoidal longitudinal que viaja a la derecha por un fluido. La onda tiene la misma amplitud A y periodo T que la oscilación del pistón.



La figura 15.7 muestra la onda que se propaga en el tubo lleno de fluido a intervalos de $\frac{1}{8}$ de un periodo, para un tiempo total de un periodo. El patrón de compresiones y expansiones se mueve uniformemente a la derecha, al igual que el patrón de crestas y valles de una onda transversal seniodal (compare con la figura 15.4). Cada partícula en el fluido oscila en MAS paralelo a la dirección de la propagación de la onda (es decir, izquierda y derecha), con la misma amplitud A y periodo T que el pistón. Las partículas mostradas con los dos puntos rojos de la figura 15.7 están separadas una longitud de onda, por lo que oscilan en fase entre sí.

Al igual que la onda transversal senoidal de la figura 15.4, en un periodo T la onda longitudinal de la figura 15.7 viaja una longitud de onda λ a la derecha. Por lo tanto, la ecuación fundamental $v = \lambda f$ se cumple para las ondas longitudinales igual que para las transversales y, de hecho, para *todos* los tipos de ondas periódicas. Como haremos con las ondas transversales, en este capítulo y en el siguiente, sólo consideraremos las situaciones en que la rapidez de las ondas longitudinales no dependa de la frecuencia.

Ejemplo 15.1 Longitud de onda de un sonido musical

Las ondas sonoras son ondas longitudinales en aire. La rapidez del sonido depende de la temperatura; a 20 °C, es de 344 m/s (1130 ft/s). Calcule la longitud de onda de una onda sonora en aire a 20 °C, si la frecuencia es de 262 Hz (la frecuencia aproximada del do medio de un piano).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la relación entre rapidez de onda, longitud de onda y frecuencia para una onda periódica. La incógnita es la longitud de onda λ.

PLANTEAR: Nos dan la rapidez de la onda $v = 344$ m/s y la frecuencia $f = 262$ Hz, así que podemos usar la relación de la ecuación (15.1) entre v, λ y f.

EJECUTAR: Despejamos la incógnita λ de la ecuación (15.1):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344\ \text{m/s}}{262\ \text{Hz}} = \frac{344\ \text{m/s}}{262\ \text{s}^{-1}} = 1.31\ \text{m}$$

Observe que las unidades de frecuencia son hertz (Hz), o bien, inversa de segundos (s^{-1}).

EVALUAR: ¿Qué sucede con la longitud de onda si cambia la frecuencia? Los cambios de frecuencia no afectan la rapidez de las ondas sonoras, así que la relación $\lambda = v/f$ nos indica que la longitud de onda cambiará en proporción inversa con la frecuencia. Por ejemplo, el do alto que cantan las sopranos coloratura está dos octavas arriba del do medio. Cada octava corresponde a un factor de 2 en la frecuencia, así que la frecuencia del do alto es cuatro veces la del do medio: $f = 4(262\ \text{Hz}) = 1048$ Hz. Por lo tanto, la *longitud de onda* del do alto es *la cuarta parte* de la del do medio: $\lambda = (1.31\ \text{m})/4 = 0.328$ m.

Evalúe su comprensión de la sección 15.2 Si se aumenta al doble la longitud de onda en una cuerda, ¿qué sucede con la rapidez de la onda? ¿Y con su frecuencia? i) v se duplica y f permanece igual; ii) v permanece igual y f se duplica; iii) v se reduce a la mitad y f permanece igual; iv) v permanece igual y f se reduce a la mitad; v) ninguna de las anteriores.

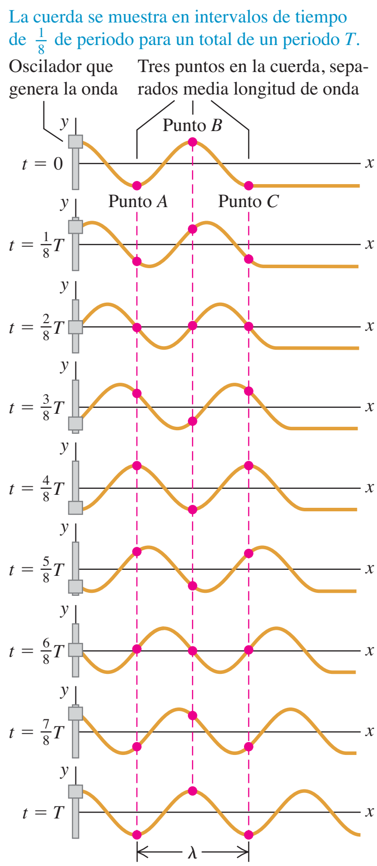
MP

15.3 Descripción matemática de una onda

Muchas características de las ondas periódicas pueden describirse usando los conceptos de rapidez de onda, amplitud, periodo, frecuencia y longitud de onda; sin embargo, es común que necesitemos una descripción más detallada de las posiciones y los movimientos de las partículas individuales del medio en instantes específicos durante la propagación de una onda. Para esta descripción, necesitamos el concepto de *función de onda*, una función que describe la posición de cualquier partícula en el medio en cualquier instante. Nos concentraremos en las ondas *senoidales*, en las que cada partícula tiene un MAS alrededor de su posición de equilibrio.

Como ejemplo específico, examinemos las ondas en una cuerda estirada. Si despreciamos el pandeo de la cuerda por la gravedad, su posición de equilibrio es en una línea recta, la cual tomamos como el eje x de un sistema de coordenadas. Las ondas en una cuerda son *transversales*; durante el movimiento ondulatorio una partícula con posición de equilibrio x se desplaza cierta distancia y en la dirección perpendicular al eje x. El valor de y depende de cuál partícula estamos considerando (es decir, y depende de x) y también del instante t en que la consideramos. Así, y es *función* tanto de x como de t; $y = y(x, t)$. Llamamos a $y(x, t)$ la **función de onda** que describe la onda. Si conocemos esta función para cierto movimiento ondulatorio, podemos usarla para calcular el desplazamiento (con respecto al equilibrio) de cualquier partícula en cualquier instante. Con esto podemos calcular la velocidad y la aceleración de cualquier partícula, la forma de la cuerda y todo lo que nos interese acerca del comportamiento de la cuerda en cualquier instante.

15.8 Seguimiento de las oscilaciones de tres puntos en una cuerda, conforme la onda senoidal se propaga por ella.



Función de onda de una onda senoidal

Veamos cómo se determina la forma de la función de onda para una onda senoidal. Supongamos que una onda senoidal viaja de izquierda a derecha (dirección de x creciente) por la cuerda, como en la figura 15.8. Cada partícula de la cuerda oscila en movimiento armónico simple con la misma amplitud y frecuencia; pero las oscilaciones de partículas en diferentes puntos de la cuerda *no* están todas coordinadas. La partícula marcada con el punto B en la figura 15.8 está en su máximo valor positivo de y en $t = 0$ y vuelve a $y = 0$ en $t = \frac{2}{8}T$; esto mismo sucede con una partícula en el punto A o en el punto C en $t = \frac{4}{8}T$ y $t = \frac{6}{8}T$, exactamente medio periodo después. Para cualesquiera dos partículas de la cuerda, el movimiento de la partícula de la derecha (en términos de la onda, la partícula "de bajada") se retrasa con respecto al movimiento de la partícula de la izquierda en una cantidad proporcional a la distancia entre las partículas.

Así, los movimientos cíclicos de diversos puntos de la cuerda están desfasados entre sí en diversas fracciones de un ciclo. Llamamos a éstas *diferencias de fase*, y decimos que la *fase* del movimiento es diferente para diferentes puntos. Por ejemplo, si un punto tiene su desplazamiento positivo máximo al mismo tiempo que otro tiene su desplazamiento negativo máximo, los dos están desfasados medio ciclo. (Éste es el caso de los punto A y B, o de los puntos B y C.)

Suponga que el desplazamiento de una partícula en el extremo izquierdo de la cuerda ($x = 0$), donde la onda se origina, está dado por

$$y(x = 0, t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi f t \tag{15.2}$$

Es decir, la partícula oscila en movimiento armónico simple con amplitud A, frecuencia f y frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. La notación $y(x = 0, t)$ nos recuerda que el movimiento de esta partícula es un caso especial de la función de onda $y(x, t)$ que describe toda la onda. En $t = 0$, la partícula en $x = 0$ tiene máximo desplazamiento positivo ($y = A$) y está instantáneamente en reposo (porque el valor de y es un máximo).

La perturbación ondulatoria viaja de $x = 0$ a algún punto x a la derecha del origen en un tiempo dado por x/v, donde v es la rapidez de la onda. Así, el movimiento del punto x en el instante t es el mismo que el movimiento del punto $x = 0$ en el instante anterior $t - x/v$. Por lo tanto, podemos obtener el desplazamiento del punto x en el instante t con sólo sustituir t en la ecuación (15.2) por $(t - x/v)$. Al hacerlo, obtenemos la siguiente expresión para la función de onda:

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Dado que $\cos(-\theta) = \cos\theta$, podemos rescribir la función de onda así:

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right) \quad \text{(onda senoidal que avanzan en la dirección } +x\text{)} \tag{15.3}$$

El desplazamiento $y(x, t)$ es función tanto de la posición x del punto como del tiempo t. Podemos hacer más general la ecuación (15.3) contemplando diferentes valores del ángulo de fase, como hicimos para el movimiento armónico simple en la sección 13.2, pero por ahora omitiremos esto.

Podemos rescribir la función de onda dada por la ecuación (15.3) de varias formas distintas pero útiles. Una es expresarla en términos del periodo $T = 1/f$ y la longitud de onda $\lambda = v/f$:

$$y(x, t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \quad \text{(onda senoidal que se mueve en la dirección } +x\text{)} \tag{15.4}$$

Obtenemos otra forma útil de la función de onda, si definimos una cantidad k llamada **número de onda**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(número de onda)} \tag{15.5}$$

Sustituyendo $\lambda = 2\pi/k$ y $f = \omega/2\pi$ en la relación longitud de onda-frecuencia $v = \lambda f$ obtenemos

$$\omega = vk \quad \text{(onda periódica)} \tag{15.6}$$

Ahora podemos rescribir la ecuación (15.4) como

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \quad \text{(onda senoidal que se mueve en la dirección } +x\text{)} \tag{15.7}$$

Cuál de estas formas de la función de onda $y(x, t)$ usemos en un problema específico es cuestión de comodidad. Observe que ω está en rad/s, así que, por consistencia con las unidades, el número de onda k debe estar en rad/m en las ecuaciones (15.6) y (15.7). (Algunos físicos definen el número de onda como $1/\lambda$ en vez de $2\pi/\lambda$. Al leer otros textos, verifique cómo se definió este término.)

Graficación de la función de onda

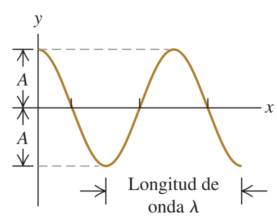
En la figura 15.9a, se grafica la función de onda $y(x, t)$ en función de x para un instante específico t. Esta gráfica da el desplazamiento y de una partícula con respecto a su posición de equilibrio en función de la coordenada x de la partícula. Si se trata de una onda transversal en una cuerda, la gráfica de la figura 15.9a representa la forma de la cuerda en ese instante, como una fotografía instantánea de la cuerda. En particular, en $t = 0$,

$$y(x, t = 0) = A\cos kx = A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

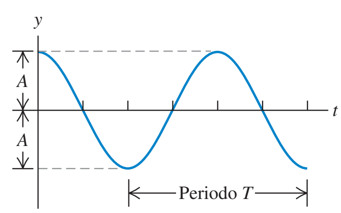
En la figura 15.9b, se muestra una gráfica de la función de onda contra el tiempo t para una coordenada x específica. Esta curva da el desplazamiento y de la partícula en

15.9 Dos gráficas de la función ondulatoria $y(x, t)$ en la ecuación (15.7).
a) La gráfica de desplazamiento y contra la coordenada x en el tiempo $t = 0$.
b) La gráfica de desplazamiento y contra el tiempo t en la coordenada $x = 0$.
La escala vertical se exageró en *a*) y en *b*).

a) Si usamos la ecuación (15.7) para graficar y en función de x para el tiempo $t = 0$, la curva muestra la *forma* de la cuerda en $t = 0$.



b) Si usamos la ecuación (15.7) para graficar y en función de t para la posición $x = 0$, la curva muestra el *desplazamiento* y de la partícula en $x = 0$ en función del tiempo.



esa coordenada en función del tiempo; es decir, describe el movimiento de la partícula. Específicamente, en la posición $x = 0$,

$$y(x = 0, t) = A\cos(-\omega t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

Esto es congruente con lo que dijimos originalmente acerca del movimiento en $x = 0$, ecuación (15.2).

CUIDADO **Gráficas de ondas** Aunque a primera vista las figuras 15.9a y 15.9b parecerían iguales, *no* son idénticas. La figura 15.9a es una imagen de la forma de la cuerda en $t = 0$, mientras que la figura 15.9b es una gráfica del desplazamiento y de una partícula en $x = 0$ en función del tiempo.

Más acerca de la función de onda

Podemos modificar las ecuaciones (15.3) a (15.7) para representar una onda que viaja en la dirección x *negativa*. En este caso, el desplazamiento del punto x en el instante t es el mismo que el del punto $x = 0$ en un instante *posterior* $(t + x/v)$, así que sustituimos t por $(t + x/v)$ en la ecuación (15.2). Para una onda que viaja en la dirección $-x$,

$$y(x, t) = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} + t\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) = A\cos(kx + \omega t) \quad (15.8)$$

(onda senoidal que se mueve en la dirección $-x$)

En la expresión $y(x, t) = A\cos(kx \pm \omega t)$ para una onda que viaja en la dirección $-x$ o bien $+x$, la cantidad $(kx \pm \omega t)$ se denomina **fase**, y desempeña el papel de cantidad angular (siempre en radianes) en la ecuación (15.7) o (15.8); su valor para cualesquiera valores de x y t determina qué parte del ciclo senoidal existe en un punto e instante dados. Para una cresta (donde $y = A$ y la función coseno vale 1), la fase podría ser 0, 2π, 4π, etcétera; para un valle (donde $y = -A$ y el coseno tiene el valor -1), podría ser π, 3π, 5π, etcétera.

La rapidez de onda es la rapidez con que tenemos que movernos con la onda para mantenernos junto a un punto que tiene una fase dada, como una cresta específica de una onda en una cuerda. Para una onda que viaja en la dirección $+x$, eso implica $kx - \omega t =$ constante. Derivando con respecto a t, obtenemos $k\,dx/dt = \omega$, o bien,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Si comparamos esto con la ecuación (15.6), vemos que dx/dt es igual a la rapidez v de la onda. Por esta relación, a veces v se denomina la *velocidad de fase* de la onda. (Aunque *rapidez de fase* sería más correcto.)

Estrategia para resolver problemas 15.1 Ondas mecánicas

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Los problemas de ondas se dividen en dos grandes categorías. Los problemas de *cinemática* se ocupan de describir el movimiento de las ondas; en ellos intervienen la rapidez de onda v, la longitud de onda λ (o el número de onda k), la frecuencia f (o la frecuencia angular ω) y la amplitud A. También podría intervenir la posición, velocidad y aceleración de partículas individuales del medio. En problemas de *dinámica*, también se usan conceptos de las leyes de Newton, como fuerza y masa. Por ejemplo, más adelante en este capítulo encontraremos problemas donde interviene la relación entre la rapidez de onda y las propiedades mecánicas del medio.

Como siempre, identifique la(s) incógnita(s) del problema. En algunos casos, será la función de onda.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Elabore una lista de las cantidades cuyos valores se dan. Para visualizar mejor la situación, podría ser útil trazar gráficas de y contra x (como la figura 15.9a) y de y contra t (como la figura 15.9b). Rotule sus gráficas con los valores de las cantidades conocidas.

2. Decida qué ecuaciones necesitará. Si se dan dos de las tres cantidades v, f y λ, se puede obtener la tercera con la ecuación (15.1), ($v = \lambda f$) (véase el ejemplo 15.1). Si en el problema interviene la frecuencia angular ω o el número de onda k, se necesitarán las definiciones de esas cantidades y la ecuación (15.6), ($\omega = vk$). También podrían necesitarse las diversas formas de la función de onda dadas en las ecuaciones (15.3), (15.4) y (15.7).
3. Si no se da la rapidez de onda y no se tiene suficiente información para calcularla usando $v = \lambda f$, podría obtenerse a partir de las relaciones entre v y las propiedades mecánicas del sistema. (En la siguiente sección desarrollaremos esta relación para ondas en una cuerda.)

EJECUTAR *la solución como sigue:* Despeje las cantidades desconocidas empleando las ecuaciones que seleccionó. En algunos problemas sólo habrá que hallar el valor de una de las variables de onda.

Si le piden determinar la función de onda, necesitará conocer A y dos de las tres cantidades v, λ y f (o bien, v, k y ω). Una vez que tenga esa información, podrá usarla en la ecuación (15.3), (15.4) o (15.7) para obtener la función específica de onda para el problema en cuestión. Con ella, podrá obtener el valor de y en cualquier punto (valor de x) y en cualquier instante sustituyendo en la función de onda.

EVALUAR *la respuesta:* Examine de forma crítica sus resultados. Compruebe que los valores de v, f y λ (o bien, v, ω y k) concuerden con las relaciones dadas en la ecuación (15.1) o la (15.6). Si calculó la función de onda, revise uno o más casos especiales para los cuales pueda inferir los resultados.

Ejemplo 15.2 Onda en un tendedero

Su primo Morton está jugando con la cuerda para tender: desata un extremo, tensa la cuerda y mueve el extremo hacia arriba y hacia abajo senoidalmente, con una frecuencia de 2.00 Hz y una amplitud de 0.075 m. La rapidez de onda es $v = 12.0\ \text{m/s}$. En $t = 0$, el extremo tiene desplazamiento positivo máximo y está en reposo instantáneamente. Suponga que ninguna onda rebota del extremo lejano para complicar el patrón. *a*) Calcule la amplitud, la frecuencia angular, el periodo, la longitud de onda y el número de onda. *b*) Obtenga una función de onda que la describa. *c*) Escriba las ecuaciones para el desplazamiento, en función del tiempo, del extremo que Morton sujeta y de un punto a 3.00 m de ese extremo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de cinemática acerca del movimiento de la cuerda. Puesto que Morton mueve la mano senoidalmente, produce una onda senoidal que se propaga por la cuerda. Por lo tanto, podemos usar todas las expresiones que desarrollamos en esta sección. Las incógnitas en el inciso *a*) son amplitud A, frecuencia angular ω, periodo T, longitud de onda λ y número de onda k, así que necesitamos usar las ecuaciones que relacionan estas cantidades. En los incisos *b*) y *c*), las "incógnitas" son en realidad expresiones de desplazamiento; para obtenerlas, usaremos las ecuaciones generales para la función de onda de una onda senoidal.

PLANTEAR: Una fotografía de la cuerda en el instante $t = 0$ se vería como la figura 15.9a, con el desplazamiento máximo en $x = 0$ (el extremo que sujeta Morton). Tomamos como dirección $+x$ la dirección en que se propaga la onda, para utilizar las ecuaciones (15.4) y (15.7) como descripción del desplazamiento de la cuerda en función de la posición x y el tiempo t. También usaremos las relaciones $f = 1/T$, $\omega = 2\pi f$, $k = 2\pi/\lambda$, $v = \lambda f$ y $\omega = vk$.

EJECUTAR: *a*) La amplitud A de la onda es la del movimiento del extremo de la cuerda, $A = 0.075\ \text{m}$. Asimismo, la frecuencia de la onda es $f = 2.00\ \text{Hz}$, igual a la frecuencia del extremo de la cuerda. La frecuencia angular es

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = (2\pi\ \text{rad/ciclo})(2.00\ \text{ciclos/s}) = 4.00\pi\ \text{rad/s}\\ &= 12.6\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

El periodo es $T = 1/f = 0.500\ \text{s}$. Obtenemos la longitud de onda de la ecuación (15.1):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{12.0\ \text{m/s}}{2.00\ \text{s}^{-1}} = 6.00\ \text{m}$$

Calculamos el número de onda de la ecuación (15.5) o la (15.6):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{6.00\ \text{m}} = 1.05\ \text{rad/m} \qquad \text{o bien,}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{4.00\pi\ \text{rad/s}}{12.0\ \text{m/s}} = 1.05\ \text{rad/m}$$

b) Puesto que obtuvimos los valores de A, T y λ en el inciso *a*), podemos escribir la función de onda empleando la ecuación (15.4):

$$\begin{aligned}y(x,t) &= A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\\ &= (0.075\ \text{m})\cos 2\pi\left(\frac{x}{6.00\ \text{m}} - \frac{t}{0.500\ \text{s}}\right)\\ &= (0.075\ \text{m})\cos[(1.05\ \text{rad/m})x - (12.6\ \text{rad/s})t]\end{aligned}$$

Podemos obtener esta misma ecuación de la ecuación (15.7) usando los valores de ω y k que obtuvimos en el inciso *a*).

c) Con la dirección $+x$ que elegimos, los dos puntos en cuestión están en $x = 0$ y $x = +3.00\ \text{m}$. Para cada uno, podemos obtener una expresión para el desplazamiento en función de t, sustituyendo estos valores de x en la función de onda obtenida en el inciso *b*):

$$\begin{aligned}y(x=0,t) &= (0.075\ \text{m})\cos 2\pi\left(\frac{0}{6.00\ \text{m}} - \frac{t}{0.500\ \text{s}}\right)\\ &= (0.075\ \text{m})\cos(12.6\ \text{rad/s})t\\ y(x=+3.00\ \text{m},t) &= (0.075\ \text{m})\cos 2\pi\left(\frac{3.00\ \text{m}}{6.00\ \text{m}} - \frac{t}{0.500\ \text{s}}\right)\\ &= (0.075\ \text{m})\cos[\pi - (12.6\ \text{rad/s})t]\\ &= -(0.075\ \text{m})\cos(12.6\ \text{rad/s})t\end{aligned}$$

continúa

EVALUAR: En el inciso *b*), la cantidad $(1.05 \text{ rad/m})x - (12.6 \text{ rad/s})t$ es la *fase* de un punto x de la cuerda en el instante t. Las fases de los dos puntos de el inciso *c*) difieren en π porque los puntos están separados por media longitud de onda ($\lambda/2 = (6.00 \text{ m})/2 = 3.00$ m). Ambos puntos oscilan en un MAS con la misma frecuencia y amplitud; pero sus oscilaciones están desfasadas medio ciclo. Así, mientras que una gráfica de y contra t para el punto en $x = 0$ es una curva de coseno (como la figura 15.9b), una gráfica de y contra t para el punto $x = 3.00$ m es un coseno *negativo* (igual a una curva de coseno desplazada medio ciclo).

Usando la expresión para $y(x = 0, t)$ del inciso *c*), ¿puede demostrar que el extremo de la cuerda en $x = 0$ está instantáneamente en reposo en $t = 0$, como se dijo al principio del ejemplo? (*Sugerencia:* calcule la velocidad en este punto derivando y con respecto a t.)

Velocidad y aceleración de partículas en una onda senoidal

De la función de onda podemos obtener una expresión para la velocidad transversal de cualquier *partícula* en una onda transversal, que llamaremos v_y para distinguirla de la rapidez de propagación de la onda, v. Para calcular v_y en un punto x dado, derivamos la función de onda $y(x, t)$ con respecto a t, manteniendo x constante. Si la función de onda es

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

entonces,

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad (15.9)$$

En esta expresión, ∂ es una d modificada para recordarnos que $y(x, t)$ es una función de *dos* variables y que sólo estamos permitiendo que una de ellas (t) varíe. La otra (x) es constante porque estamos examinando un punto dado de la cuerda. Ésta es una *derivada parcial.* Si no ha llegado a ese punto en sus cursos de cálculo, no se preocupe; es una idea sencilla.

La ecuación (15.9) muestra que la velocidad transversal de una partícula varía con el tiempo, lo esperado en movimiento armónico simple. La rapidez máxima de una partícula es ωA; ésta puede ser mayor, menor o igual que la rapidez de onda v, dependiendo de la amplitud y la frecuencia de la onda.

La *aceleración* de cualquier partícula es la *segunda* derivada parcial de $y(x, t)$ con respecto a t:

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t) \qquad (15.10)$$

La aceleración de una partícula es igual a $-\omega^2$ por su desplazamiento, que es el resultado que obtuvimos en la sección 13.2 para el movimiento armónico simple.

También podemos calcular derivadas parciales de $y(x, t)$ con respecto a x, manteniendo t constante. Esto equivale a estudiar la forma de la cuerda en un momento dado, como una fotografía instantánea. La primera derivada $\partial y(x, t)/\partial x$ es la *pendiente* de la cuerda en cualquier punto. La segunda derivada parcial con respecto a x es la *curvatura* de la cuerda:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x, t) \qquad (15.11)$$

Por las ecuaciones (15.10) y (15.11), y la relación $\omega = vk$, vemos que

$$\frac{\partial^2 y(x, t)/\partial t^2}{\partial^2 y(x, t)/\partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \qquad \text{(ecuación de onda)} \qquad (15.12)$$

Dedujimos la ecuación (15.12) para una onda que viaja en la dirección $+x$. Se pueden seguir los mismos pasos para demostrar que la función de onda para una onda senoidal que se propaga en la dirección *x negativa*, $y(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$, también satisface esta ecuación.

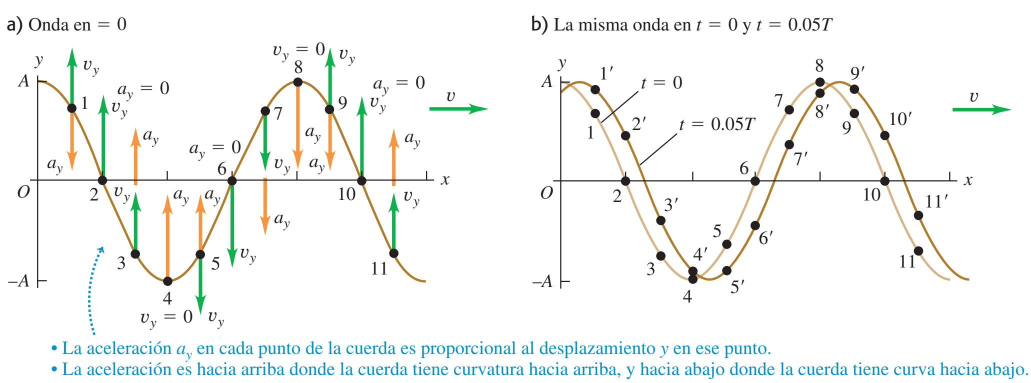
La ecuación (15.12), llamada **ecuación de onda**, es una de las más importantes en física. Siempre que ocurre, sabemos que una perturbación puede propagarse como onda a lo largo del eje x con rapidez v. La perturbación no tiene que ser una onda senoidal; veremos en la siguiente sección que *cualquier* onda en una cuerda obedece la ecuación (15.12), sea periódica o no (véase también el problema 15.61). En el capítulo 32 veremos que los campos eléctricos y magnéticos satisfacen la ecuación de onda; la rapidez de la onda resulta ser la de la luz, lo que nos llevará a la conclusión de que la luz es una onda electromagnética.

La figura 15.10a muestra la velocidad v_y y la aceleración a_y transversales, dadas por las ecuaciones (15.9) y (15.10), para varios puntos de una cuerda cuando una onda senoidal pasa por ella. Observe que, en puntos donde la cuerda tiene curvatura hacia arriba $\left(\partial^2 y/\partial x^2 > 0\right)$, la aceleración del punto es positiva $\left(a_y = \partial^2 y/\partial t^2 > 0\right)$; esto se sigue de la ecuación de onda, ecuación (15.12). Por la misma razón, la aceleración es negativa $\left(a_y = \partial^2 y/\partial t^2 < 0\right)$ en puntos donde la cuerda tiene curvatura hacia abajo $\left(\partial^2 y/\partial x^2 < 0\right)$, y la aceleración es cero $\left(a_y = \partial^2 y/\partial t^2 = 0\right)$ en los puntos de inflexión donde la curvatura es cero $\left(\partial^2 y/\partial x^2 = 0\right)$. Destacamos otra vez que v_y y a_y son la velocidad y la aceleración *transversales* de puntos en la cuerda; estos puntos se mueven en la dirección y, no en la dirección de propagación de la onda. Los movimientos transversales de varios puntos de la cuerda pueden verse en la figura 15.10b.

El concepto de función de onda es igualmente útil para las ondas *longitudinales*, y todo lo que hemos dicho acerca de funciones de onda se puede adaptar a este caso. La cantidad y sigue midiendo el desplazamiento de una partícula del medio con respecto a su posición de equilibrio; la diferencia es que, para una onda longitudinal, el desplazamiento es *paralelo* al eje x en vez de perpendicular a él. Veremos las ondas longitudinales con detalle en el capítulo 16.

Evalúe su comprensión de la sección 15.3 La figura 15.8 muestra una onda senoidal de periodo T en una cuerda en los instantes $0, \frac{1}{8}T, \frac{2}{8}T, \frac{3}{8}T, \frac{4}{8}T, \frac{5}{8}T, \frac{6}{8}T, \frac{7}{8}T$ y T *a*) ¿En qué instante el punto A está en la cuerda que se mueve hacia arriba con rapidez máxima? *b*) En qué instante el punto B en la cuerda tiene la máxima aceleración hacia arriba? *c*) ¿En qué instante el punto C en la cuerda tiene una aceleración hacia abajo, pero una velocidad hacia arriba?

15.10 a) Otra vista de la onda en $t = 0$ de la figura 15.9a. Los vectores muestran la velocidad transversal v_y y la aceleración transversal a_y en varios puntos de la cuerda. b) Desde $t = 0$ hasta $t = 0.05\,T$, una partícula en el punto 1 se desplaza al punto 1′, una partícula en el punto 2 se desplaza al punto 2′, y así sucesivamente.



ActivPhysics ONLINE
10.2 Rapidez de las ondas en una cuerda

15.4 Rapidez de una onda transversal

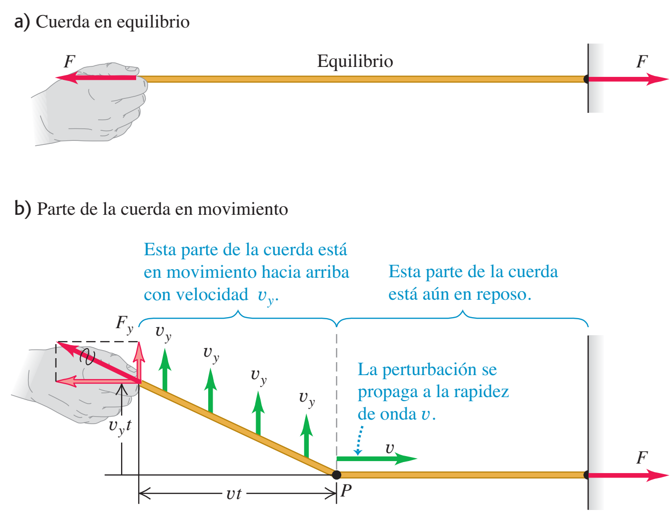
Una de las propiedades clave de cualquier onda es su *rapidez*. Las ondas de luz en aire tienen una rapidez de propagación mucho mayor que las del sonido (3.00×10^8 m/s contra 344 m/s); por esto vemos el destello de un relámpago antes de oír el trueno. En esta sección veremos qué determina la rapidez de propagación de un tipo de onda específico: ondas transversales en una cuerda. La rapidez de estas ondas es importante por derecho propio, ya que es una parte fundamental del análisis de los instrumentos musicales de cuerda, como veremos más adelante en este capítulo. Además, la rapidez de muchos tipos de ondas mecánicas tiene la misma expresión matemática básica que la rapidez de ondas en una cuerda.

Las cantidades físicas que determinan la rapidez de las ondas transversales en una cuerda son la *tensión* de la cuerda y su *masa por unidad de longitud* (también llamada *densidad de masa lineal*). Podríamos suponer que aumentar la tensión aumenta las fuerzas de restitución que tienden a enderezar la cuerda cuando se le perturba, aumentando así la rapidez de la onda. También podríamos suponer que aumentar la masa haría el movimiento más lento, reduciendo la rapidez. Resulta que ambas ideas son correctas. Desarrollaremos la relación exacta entre rapidez de onda, tensión y masa por unidad de longitud usando dos métodos distintos. El primero es conceptualmente sencillo y considera una forma de onda específica; el segundo es más general pero también más formal. Seleccione el que más le guste.

Rapidez de una onda en una cuerda: Primer método

Consideramos una cuerda perfectamente flexible (figura 15.11). En la posición de equilibrio, la tensión es F y la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud) es μ. (Si porciones de la cuerda se desplazan con respecto al equilibrio, la masa por unidad de longitud disminuye un poco y la tensión aumenta un poco.) despreciaremos el peso de la cuerda, de modo que cuando la cuerda esté en reposo en la posición de equilibrio forme una línea perfectamente recta como en la figura 15.11a.

Comenzando en el instante $t = 0$, aplicamos una fuerza constante hacia arriba F_y al extremo izquierdo de la cuerda. Esperaríamos que el extremo se moviera con aceleración constante; eso sucedería si la fuerza se aplicara a una masa *puntual*. Aquí, el efecto de la fuerza F_y es poner sucesivamente cada vez más masa en movimiento. La onda viaja con rapidez constante v, así que el punto de división P entre la porciones en movimiento y estáticas se mueve con la misma rapidez constante v (figura 15.11b).



15.11 Propagación de onda transversal en una cuerda.

La figura 15.11b muestra que todas las partículas de la porción en movimiento de la cuerda se mueven hacia arriba con *velocidad* constante v_y, no aceleración constante. Para entender esto, observamos que el *impulso* de la fuerza F_y hasta el instante t es $F_y t$. Según el teorema del impulso y momento lineal (sección 8.1), el impulso es igual al cambio en la componente transversal total del momento lineal $(mv_y - 0)$ de la parte de la cuerda en movimiento. Dado que el sistema inició *sin* momento lineal transversal, esto es igual al momento lineal total en el instante t:

$$F_y t = mv_y$$

Así, el momento lineal total debe aumentar proporcionalmente con el tiempo. Sin embargo, dado que el punto de división P se mueve con rapidez constante, la longitud de la cuerda que está en movimiento y, por lo tanto, la masa total m en movimiento, también son proporcionales al tiempo t durante el cual la fuerza ha estado actuando. De esta manera, el *cambio* de momento lineal debe estar asociado únicamente a la cantidad creciente de masa en movimiento, no a una velocidad creciente de un elemento de masa individual. Es decir, mv_y cambia porque m cambia, no porque v_y cambie.

En el instante t, el extremo izquierdo de la cuerda ha subido una distancia $v_y t$, en tanto que el punto de frontera P ha avanzado una distancia vt. La fuerza total en el extremo izquierdo de la cuerda tiene componentes F y F_y. ¿Por qué F? No hay movimiento en la dirección a lo largo de la cuerda, así que no hay ninguna fuerza horizontal no balanceada. Por lo tanto F, la magnitud de la componente horizontal, no cambia cuando la cuerda se desplaza. En la posición desplazada, la tensión es $\left(F^2 + F_y^2\right)^{1/2}$ (mayor que F), y la cuerda se estira un poco.

Para deducir una expresión para la rapidez de la onda v, aplicamos otra vez el teorema del impulso y momento lineal a la porción de la cuerda en movimiento en el instante t, es decir, la porción a la izquierda de P en la figura 15.11b. El *impulso* transversal (fuerza transversal multiplicada por el tiempo) es igual al cambio de *momento lineal* transversal de la porción en movimiento (masa multiplicada por la componente transversal de velocidad). El impulso de la fuerza transversal F_y en el instante t es $F_y t$. En la figura 15.11b, el triángulo rectángulo cuyo vértice está en P, con catetos $v_y t$ y vt, es semejante al triángulo rectángulo cuyo vértice está en la posición de la mano, con catetos F_y y F. Entonces,

$$\frac{F_y}{F} = \frac{v_y t}{vt} \qquad F_y = F\frac{v_y}{v}$$

e

$$\text{Impulso transversal} = F_y t = F\frac{v_y}{v}t$$

La masa de la porción en movimiento de la cuerda es el producto de la masa por unidad de longitud μ y la longitud vt, es decir, μvt. El momento lineal transversal es el producto de esta masa y la velocidad transversal v_y:

$$\text{Momento lineal transversal} = (\mu vt)v_y$$

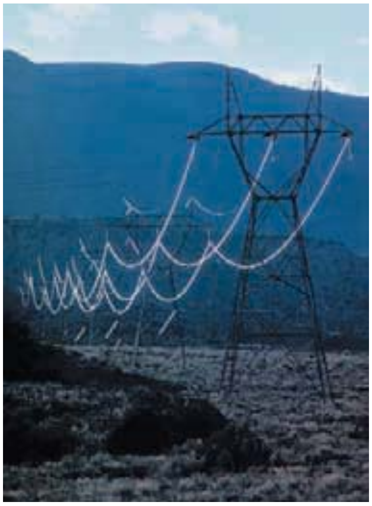
Observamos una vez más que el momento lineal aumenta con el tiempo, *no* porque la masa se mueva con mayor rapidez, como solía suceder en el capítulo 8, sino porque *más masa* se pone en movimiento. No obstante, el impulso de la fuerza F_y sigue siendo igual al cambio total de momento lineal del sistema. Aplicando esta relación, obtenemos

$$F\frac{v_y}{v}t = \mu vtv_y$$

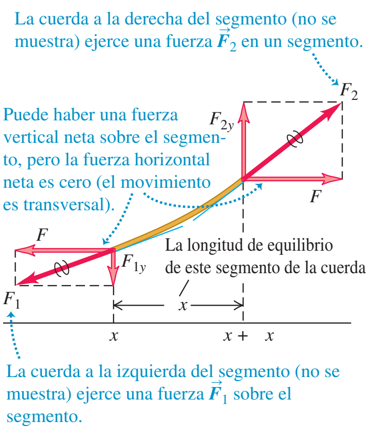
Despejando v, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(rapidez de una onda transversal en una cuerda)} \qquad (15.13)$$

15.12 Estos cables tienen una cantidad relativamente grande de masa por unidad de longitud (μ) y una tensión (F) baja. Si los cables sufren una perturbación (como cuando un ave se posa sobre ellos), viajarán ondas transversales en ellos con rapidez baja $v = \sqrt{F/\mu}$.



15.13 Diagrama de cuerpo libre de un segmento de cuerda. La fuerza en cada extremo de la cuerda es tangente a la cuerda en el punto de aplicación.



La ecuación (15.13) confirma nuestra predicción de que la rapidez de onda v debería aumentar al incrementarse la tensión F, pero disminuir cuando la masa por unidad de longitud μ aumenta (figura 15.12).

Observe que v_y no aparece en la ecuación (15.13); por lo tanto, la rapidez de la onda no depende de v_y. Nuestro cálculo consideró sólo un tipo muy especial de pulso, pero podemos considerar *cualquier* forma de perturbación ondulatoria como una serie de pulsos con diferentes valores de v_y. Así, aunque dedujimos la ecuación (15.13) para un caso especial, es válida para *cualquier* movimiento ondulatorio transversal en una cuerda, incluidas la onda senoidal y las otras ondas periódicas que vimos en la sección 15.3. Observe también que la rapidez de onda no depende de la amplitud ni la frecuencia de la onda, en congruencia con nuestros supuestos de la sección 15.3.

Rapidez de una onda en una cuerda: segundo método

Veamos una deducción alterna de la ecuación (15.13). Si el lector no maneja con confianza las derivadas parciales, puede omitirlas. Aplicamos la segunda ley de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, a un pequeño segmento de cuerda, cuya longitud en la posición de equilibrio es Δx (figura 15.13). La masa del segmento es $m = \mu\,\Delta x$; las fuerzas en los extremos se representan en términos de sus componentes x y y. Las componentes x tienen magnitud igual F y su suma es cero, porque el movimiento es transversal y no hay componente de aceleración en la dirección x. Para obtener F_{1y} y F_{2y}, observamos que el cociente F_{1y}/F es igual en magnitud a la *pendiente* de la cuerda en el punto x y que F_{2y}/F es igual a la pendiente en el punto $x + \Delta x$. Teniendo cuidado con los signos, vemos que

$$\frac{F_{1y}}{F} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \qquad \frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \tag{15.14}$$

La notación nos recuerda que las derivadas se evalúan en los puntos x y $x + \Delta x$, respectivamente. Por la ecuación (15.14), vemos que la componente y de fuerza neta es

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \tag{15.15}$$

Ahora igualamos F_y de la ecuación (15.15) a la masa $\mu\,\Delta x$ multiplicada por la componente y de aceleración, $\partial^2 y/\partial t^2$. Obtenemos

$$F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \mu\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.16}$$

o bien, dividiendo entre $F\,\Delta x$,

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.17}$$

Ahora tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$. En este límite, el lado izquierdo de la ecuación (15.17) se convierte en la derivada de $\partial y/\partial x$ con respecto a x (con t constante), es decir, la *segunda* derivada (parcial) de y con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.18}$$

Por fin llegamos al desenlace de nuestra historia. La ecuación (15.18) tiene exactamente la misma forma que la *ecuación de onda*, ecuación (15.12), que dedujimos al final de la sección 15.3. Esa ecuación y la (15.18) describen el mismo movimiento, así que deben ser idénticas. Si comparamos las dos ecuaciones, vemos que, para que así suceda, debemos tener

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{15.19}$$

que es la misma expresión que la ecuación (15.13).

En esta deducción no hicimos supuestos especiales acerca de la forma de la onda. Puesto que nuestra deducción nos llevó a redescubrir la ecuación (15.12), la ecuación de onda, concluimos que la ecuación de onda es válida para las ondas en una cuerda, *sea cual fuere* su forma.

La rapidez de las ondas mecánicas

La ecuación (15.13) o la (15.19) da la rapidez de la onda únicamente para el caso especial de las ondas mecánicas en un hilo o una cuerda estirados. Curiosamente, para muchos tipos de ondas mecánicas, incluidas las ondas en una cuerda, la expresión para la rapidez de la onda tiene la misma forma general:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Fuerza de restitución que vuelve el sistema al equilibrio}}{\text{Inercia que resiste el retorno al equilibrio}}}$$

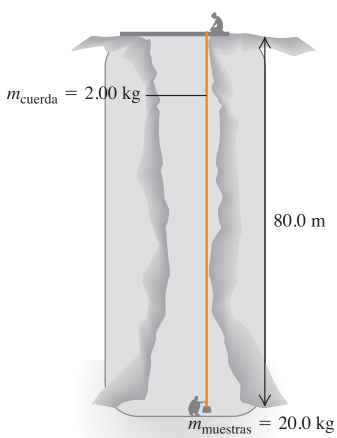
Para interpretar esta expresión, examinemos una vez más el caso de ondas en una cuerda. La tensión F en la cuerda desempeña el papel de la fuerza de restitución; tiende a hacer que la cuerda vuelva a su configuración de equilibrio, no perturbada. La masa de la cuerda —o, mejor dicho, la densidad lineal de masa μ— proporciona la inercia que evita que la cuerda regrese instantáneamente al equilibrio. Por lo tanto, tenemos $v = \sqrt{F/\mu}$ para la rapidez de ondas en una cuerda.

En el capítulo 16 veremos una expresión similar para la rapidez de las ondas sonoras en un gas. A grandes rasgos, la presión del gas proporciona la fuerza que tiende a volver al gas a su estado no perturbado después de que una onda sonora pasa por él. La inercia proviene de la densidad, o masa por unidad de volumen, del gas.

Ejemplo 15.3 Cálculo de la rapidez de onda

Un extremo de una cuerda de nylon está atado a un soporte estacionario en la boca de un tiro de mina vertical de 80.0 m de profundidad (figura 15.14). La cuerda está tensada por una caja de muestras de minerales con masa de 20.0 kg atada al extremo inferior. La masa de la cuerda es de 2.00 kg. El geólogo que está hasta abajo envía señales a su colega de arriba tirando lateralmente de la cuerda. *a*) Calcule la rapidez de una onda transversal en la cuerda. *b*) Si a un punto de la cuerda se imparte un movimiento armónico simple transversal con frecuencia de 2.00 Hz, ¿cuántos ciclos de la onda habrá en la cuerda?

15.14 Envío de señales mediante ondas transversales en una cuerda vertical.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el inciso *a*), la incógnita es la rapidez de la onda. Esta parte tiene aspectos de *dinámica*, que es la relación entre la rapidez de la onda y las propiedades de la cuerda (tensión y densidad de masa lineal). El inciso *b*) implica *cinemática*, pues necesitamos conocer cómo se relacionan la rapidez, la frecuencia y la longitud de la onda. (La incógnita es en realidad el número de longitudes de onda que caben en la longitud de la cuerda.)

Supondremos que la tensión en la cuerda se debe al peso de la caja de muestras. De hecho, el peso de la cuerda misma contribuye a la tensión, lo que implica que la tensión sea diferente tanto en la parte de arriba de la cuerda, como en la parte de abajo. Despreciaremos este efecto porque el peso de la cuerda es pequeño en comparación con el peso de las muestras de minerales.

PLANTEAR: Usaremos la relación $v = \sqrt{F/\mu}$ en el inciso *a*). Si despreciamos el peso de la cuerda, la tensión F será igual al peso de la caja. En el inciso *b*), usaremos la ecuación $v = f\lambda$ para obtener la longitud de onda, que compararemos después con la longitud de la cuerda (80.0 m).

EJECUTAR: *a*) La tensión en la cuerda (debida a la caja de muestras) es:

$$F = m_{muestras}g = (20.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 196\text{ N}$$

continúa

y la masa por unidad de longitud de la cuerda es

$$\mu = \frac{m_{\text{cuerda}}}{L} = \frac{2.00\ \text{kg}}{80.0\ \text{m}} = 0.0250\ \text{kg/m}$$

Entonces, por la ecuación (15.13), la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{196\ \text{N}}{0.0250\ \text{kg/m}}} = 88.5\ \text{m/s}$$

b) Por la ecuación (15.1),

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{88.5\ \text{m/s}}{2.00\ \text{s}^{-1}} = 44.3\ \text{m}$$

La longitud de la cuerda es de 80.0 m, así que el número de ciclos que caben en la cuerda es

$$\frac{80.0\ \text{m/s}}{44.3\ \text{m/ciclo}} = 1.81\ \text{ciclos}$$

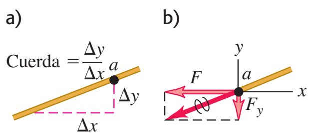
EVALUAR: Si consideramos el peso de la cuerda, la tensión es mayor en la parte de arriba de la cuerda que abajo. Por lo tanto, la rapidez de la onda aumentará y la longitud de onda disminuirá conforme la onda suba por la cuerda. ¿Puede comprobar que la rapidez de la onda al llegar a la parte superior es de 92.9 m/s?

Evalúe su comprensión de la sección 15.4 Las seis cuerdas de una guitarra tienen la misma longitud y están sometidas a una tensión muy parecida, pero tienen diferente espesor. ¿En qué cuerda viajan con mayor rapidez las ondas? i) la cuerda más gruesa; ii) la cuerda más delgada; iii) la rapidez de onda es la misma en todas las cuerdas.

15.5 Energía del movimiento ondulatorio

Todo movimiento ondulatorio tiene *energía* asociada a él. La energía que recibimos del Sol y los efectos destructivos del oleaje y los terremotos lo atestiguan. Para producir cualesquiera de los movimientos ondulatorios que hemos visto en este capítulo, necesitamos aplicar una fuerza a una porción del medio de la onda; el punto de aplicación se mueve, así que efectuamos *trabajo* sobre el sistema. Al propagarse la onda, cada porción del medio ejerce una fuerza y realiza trabajo sobre la porción adyacente. De este modo, una onda puede transportar energía de una región del espacio a otra.

15.15 a) Punto *a* en una cuerda que lleva una onda de izquierda a derecha. b) Componentes de la fuerza ejercida sobre la parte derecha de la cuerda por la parte izquierda en el punto *a*.



Como ejemplo de las consideraciones de energía en el movimiento ondulatorio, examinemos otra vez las ondas transversales en una cuerda. ¿Cómo se transfiere energía de una porción de la cuerda a otra? Imagine una onda que viaja de izquierda a derecha (dirección $+x$) y un punto *a* específico de la cuerda (figura 15.15a). La cuerda a la izquierda de *a* ejerce una fuerza sobre la cuerda a la derecha, y viceversa. En la figura 15.15b, se ha quitado la cuerda a la izquierda de *a*, y la fuerza que ejerce en *a* se representa con las componentes F y F_y, como en las figuras 15.11 y 15.13. Destacamos que F_y/F es igual al negativo de la *pendiente* de la cuerda en *a*, que también está dada por $\partial y/\partial x$. Juntando esto, tenemos

$$F_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \tag{15.20}$$

Necesitamos el signo negativo porque F_y es negativa cuando la pendiente es positiva. Escribimos la fuerza vertical como $F_y(x, t)$ para recordar que su valor puede variar en diferentes puntos de la cuerda y con el tiempo.

Cuando el punto *a* se mueve en la dirección *y*, la fuerza F_y efectúa *trabajo* sobre este punto y, por lo tanto, transfiere energía a la parte de la cuerda que está a la derecha de *a*. La potencia correspondiente P (rapidez con que se hace trabajo) en el punto *a* es la fuerza transversal $F_y(x, t)$ en *a* multiplicada por la velocidad transversal $v_y(x, t) = \partial y(x, t)/\partial t$ de ese punto:

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \tag{15.21}$$

Esta potencia es la razón *instantánea* con que se transfiere energía por la cuerda; su valor depende de la posición *x* en la cuerda y del tiempo *t*. Sólo se transfiere energía en los puntos en que la cuerda tiene pendiente distinta de cero ($\partial y/\partial x$), de modo que hay una componente transversal de la tensión, y en los que la cuerda tiene velocidad transversal distinta de cero ($\partial y/\partial t$), de modo que la fuerza transversal puede efectuar trabajo.

La ecuación (15.21) es válida para *cualquier* onda en una cuerda, sea senoidal o no. Para una onda senoidal con función de onda dada por la ecuación (15.7), tenemos

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos(kx-\omega t) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= -kA\,\mathrm{sen}(kx-\omega t) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= \omega A\,\mathrm{sen}(kx-\omega t) \\ P(x,t) &= Fk\omega A^2\,\mathrm{sen}^2(kx-\omega t) \end{aligned} \tag{15.22}$$

Usando las relaciones $\omega = vk$ y $v^2 = F/\mu$, también podemos expresar la ecuación (15.22) en la forma alterna

$$P(x,t) = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2\,\mathrm{sen}^2(kx-\omega t) \tag{15.23}$$

La función sen^2 nunca es negativa, así que la potencia instantánea de una onda senoidal es positiva (con flujo de energía en la dirección $+x$), o bien, cero (donde no hay transferencia de energía). Nunca se transfiere energía en la dirección opuesta a la de propagación de la onda (figura 15.16).

El valor máximo de la potencia instantánea $P(x, t)$ se da cuando la función sen^2 vale la unidad:

$$P_{\text{máx}} = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \tag{15.24}$$

Para obtener la potencia *media* a partir de la ecuación (15.23), observamos que el valor *medio* de la función sen^2 en cualquier número entero de ciclos es $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la potencia media es

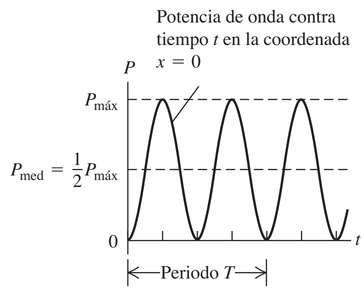
$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \qquad \text{(potencia media, onda senoidal en una cuerda)} \tag{15.25}$$

La potencia media es la mitad de la potencia instantánea máxima (véase la figura 15.16).

La razón media de transferencia de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia. Esta proporcionalidad es un resultado general para ondas mecánicas de todo tipo, incluidas las ondas sísmicas (véase la fotografía inicial del capítulo). En el caso de una onda mecánica, la razón de transferencia de energía se cuadruplica, si se duplica la frecuencia (sin variar la amplitud) o si se duplica la amplitud (sin variar la frecuencia).

Las ondas electromagnéticas son un poco diferentes. Aunque la razón media de transferencia de energía en una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud, como sucede con las ondas mecánicas, es independiente del valor de ω.

15.16 La potencia instantánea $P(x, t)$ de una onda senoidal, dada por la ecuación (15.23), se muestra en función del tiempo en la coordenada $x = 0$. La potencia nunca es negativa, lo que implica que la energía nunca fluye en dirección opuesta a la de propagación de la onda.



Ejemplo 15.4 Potencia en una onda

a) En el ejemplos 15.2, ¿con qué rapidez máxima Morton aporta energía a la cuerda? Es decir, ¿cuál es su potencia instantánea máxima? Suponga que la densidad de masa lineal de la cuerda es $\mu = 0.250$ kg/m y que Morton aplica una tensión $F = 36.0$ N. *b*) ¿Cuál es su potencia media? *c*) Al cansarse Morton, la amplitud disminuye. Calcule la potencia media cuando la amplitud ha bajado a 7.50 mm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita en el inciso *a*) es la potencia *instantánea máxima*, mientras que en *b*) y en *c*) es la potencia *media*. Como vimos, estas dos cantidades tienen valores distintos para una onda senoidal. Podremos calcular los valores de ambas cantidades porque conocemos todas las demás propiedades de la onda gracias al ejemplo 15.2.

PLANTEAR: En el inciso *a*) usaremos la ecuación (15.24); en *b*) y *c*), usaremos la ecuación (15.25).

EJECUTAR: *a*) La potencia instantánea máxima es

$$\begin{aligned} P_{\text{máx}} &= \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \\ &= \sqrt{(0.250\ \text{kg/m})(36.0\ \text{N})}\,(4.00\pi\ \text{rad/s})^2(0.075\ \text{m})^2 \\ &= 2.66\ \text{W} \end{aligned}$$

continúa

b) Por las ecuaciones (15.24) y (15.25), la potencia media es la mitad de la potencia instantánea máxima, así que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2}(2.66\ \text{W}) = 1.33\ \text{W}$$

c) La nueva amplitud es $\frac{1}{10}$ del valor empleado en los incisos *a*) y *b*). La potencia media es proporcional al *cuadrado* de la amplitud, que ahora es

$$P_{\text{med}} = \left(\frac{1}{10}\right)^2(1.33\ \text{W}) = 0.0133\ \text{W} = 13.3\ \text{mW}$$

EVALUAR: La potencia instantánea *máxima* en el inciso *a*) se da cuando la cantidad $\text{sen}^2(kx - \omega t)$ de la ecuación (15.23) es igual a 1. En cualquier valor de x, eso sucede dos veces durante cada periodo de la onda: una vez cuando la función seno es igual a $+1$ y otra vez cuando es igual a -1. La potencia instantánea *mínima* es cero; se da cuando $\text{sen}(kx - \omega t) = 0$, lo cual también sucede dos veces por periodo.

¿Puede usted confirmar que los valores dados de μ y F imprimen la rapidez de onda mencionada en el ejemplo 15.2?

Intensidad de las ondas

Las ondas en una cuerda transfieren energía en una sola dimensión del espacio (a lo largo de la cuerda). Sin embargo, otros tipos de ondas, incluidas las ondas sonoras en el aire y las ondas sísmicas en la Tierra, transportan energía en las tres dimensiones espaciales. Para ondas que viajan en tres dimensiones, definimos su **intensidad** (denotada con I) como *la rapidez media con que la onda transporta energía, por unidad de área*, a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Es decir, la intensidad I es la potencia media por unidad de área. Por lo regular, se mide en watts por metro cuadrado (W/m^2).

Si las ondas se propagan igualmente en todas direcciones a partir de una fuente, la intensidad a una distancia r de la fuente es inversamente proporcional a r^2 (figura 15.17). Esto es consecuencia directa de la conservación de la energía. Si la potencia desarrollada por la fuente es P, entonces la intensidad media I_1 en una esfera con radio r_1 y superficie $4\pi r_1^2$ es

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

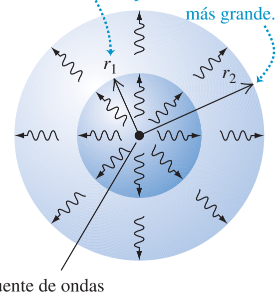
La intensidad media I_2 en una esfera con diferente radio r_2 está dada por una expresión similar. Si no se absorbe energía entre las dos esferas, la potencia P deberá ser la misma en ambas, así que

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{(ley del inverso del cuadrado para la intensidad)} \qquad (15.26)$$

Por lo tanto, la intensidad I a cualquier distancia r es inversamente proporcional a r^2. Esta relación se denomina *ley del inverso del cuadrado* para la intensidad.

15.17 Cuanto mayor sea la distancia desde la fuente de una onda, mayor será el área sobre la cual se distribuye la potencia de la onda, y menor será la intensidad de la onda.



Ejemplo 15.5 La ley del inverso del cuadrado

Una sirena del sistema de advertencia de tornados que está colocada en un poste alto radia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 15.0 m, la intensidad del sonido es de 0.250 W/m^2. ¿A qué distancia de la sirena la intensidad es de 0.010 W/m^2?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Dado que las ondas se propagan igualmente en todas direcciones, podemos usar la ley del inverso del cuadrado. La incógnita es la distancia de la fuente del sonido.

PLANTEAR: La relación que debemos usar es la ecuación (15.26). Nos dan la distancia $r_1 = 15.0$ m a la que la intensidad es $I_1 = 0.250$ W/m^2; queremos encontrar la distancia r_2 a la que la intensidad es $I_2 = 0.010\ \text{W/m}^2$.

EJECUTAR: Despejamos r_2 de la ecuación (15.26):

$$r_2 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = (15.0\ \text{m})\sqrt{\frac{0.250\ \text{W/m}^2}{0.010\ \text{W/m}^2}} = 75.0\ \text{m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestra respuesta, observamos que r_2 es cinco veces mayor que r_1. Por la ley del inverso del cuadrado, la intensidad I_2 debería ser $1/5^2 = 1/25$ de la intensidad I_1, y así es.

Al usar la ley del inverso del cuadrado, hemos supuesto que las ondas sonoras viajan en línea recta desde la sirena. Una solución más realista tendría en cuenta la reflexión de las ondas sonoras en el suelo. Sin embargo, semejante solución rebasa el alcance de este libro.

Evalúe su comprensión de la sección 15.5 Cada una de cuatro cuerdas idénticas transportan una onda senoidal de frecuencia 10 Hz. La tensión de la cuerda y la amplitud de onda son diferentes para diferentes para cuerdas: Ordene de mayor a menor los valores de la potencia media de la onda en las siguientes cuerdas: i) tensión 10 N, amplitud 1.0 mm; ii) tensión 40 N, amplitud 1.0 mm; iii) tensión 10 N, amplitud 4.0 mm; iv) tensión 20 N, amplitud 2.0 mm.

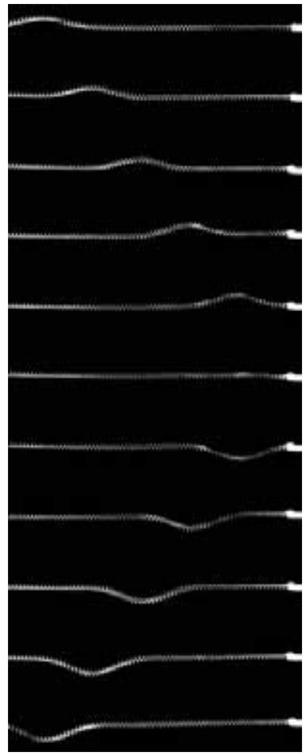
15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición

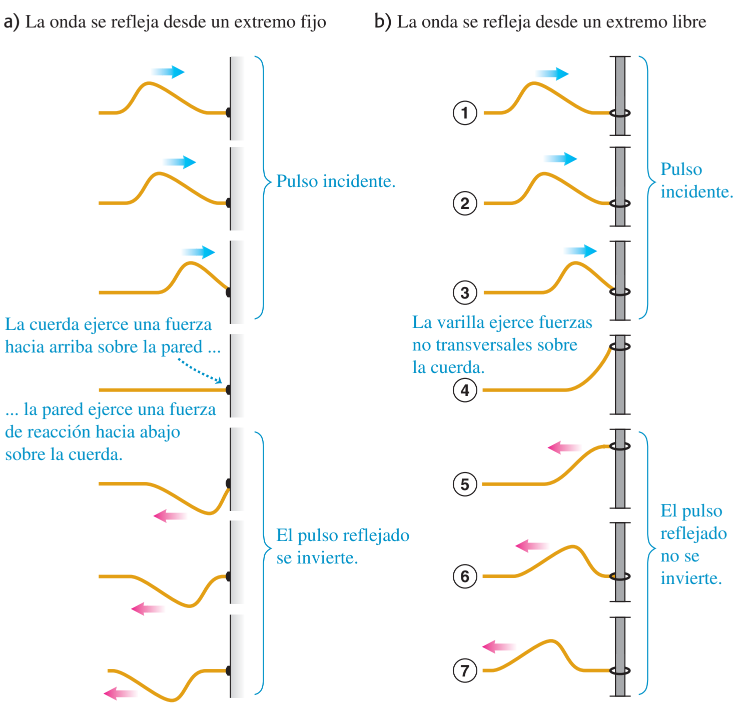
Hasta aquí, hemos hablado de ondas que se propagan continuamente en la misma dirección. Sin embargo, cuando una onda choca contra las fronteras de su medio, se *refleja* parcial o totalmente. Si gritamos hacia la pared de un edificio o hacia un acantilado que está a cierta distancia, la onda sonora se refleja en la superficie rígida, y escuchamos un eco. Si sacudimos el extremo de una cuerda cuyo otro extremo está atado a un soporte rígido, una pulsación viajará a lo largo de la cuerda y se reflejará hacia nosotros. En ambos casos, la onda inicial y la reflejada se traslapan en la misma región del medio. Este traslape de ondas se denomina **interferencia**. (En general, el término "interferencia" se refiere a lo que sucede cuando dos o más ondas pasan por la misma región al mismo tiempo.)

Como ejemplo sencillo de reflexión de ondas y el papel de la frontera de un medio de onda, veamos otra vez las ondas transversales en una cuerda estirada. ¿Qué sucede cuando un pulso de onda o una onda senoidal llega al *extremo* de la cuerda?

Si el extremo está sujeto a un soporte rígido, es un extremo *fijo* que no puede moverse. La onda incidente ejerce una fuerza sobre el soporte; la reacción a esta fuerza, ejercida *por* el soporte *sobre* la cuerda, "recula" sobre la cuerda y crea una pulsación u onda *reflejada* que viaja en la dirección opuesta. La figura 15.18 es una serie de fotografías que muestran la reflexión de un pulso en el extremo fijo de un resorte espiral largo. El pulso reflejado se mueve en la dirección opuesta a la del pulso inicial, o *incidente*, y su desplazamiento también es opuesto. Esta situación se ilustra para un pulso ondulatorio en una cuerda en la figura 15.19a.

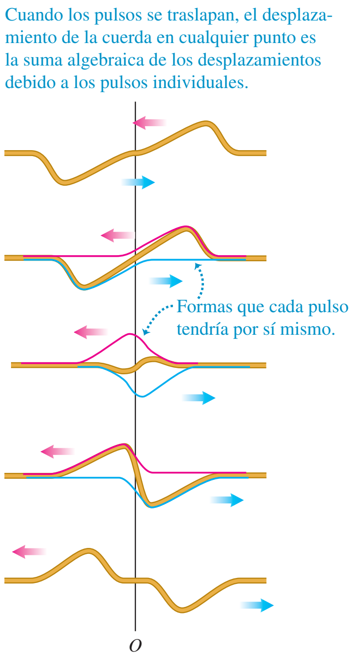
15.18 Serie de imágenes de un pulso de onda, tomadas a intervalos iguales de arriba a abajo. El pulso comienza a la izquierda en la imagen superior, viaja a la derecha, y es reflejado por el extremo derecho fijo.



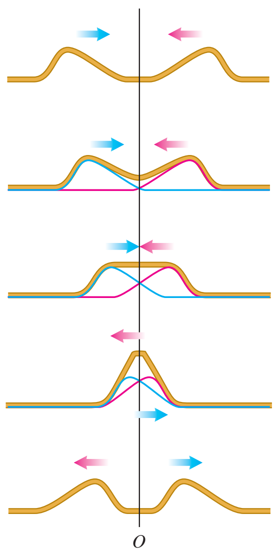


15.19 Reflexión de un pulso de onda a) en un extremo fijo de una cuerda y b) en un extremo libre. El tiempo aumenta hacia abajo en cada figura.

15.20 Traslape de dos pulsos de onda (uno hacia arriba, el otro invertido) que viajan en direcciones opuestas. El tiempo aumenta hacia abajo.



15.21 Traslape de dos pulsos de onda (ambos arriba de la cuerda) que viajan en direcciones opuestas. El tiempo aumenta hacia abajo. Compárelo con la figura 15.20.



La situación opuesta a un extremo fijo es un extremo *libre* que puede moverse sin resistencia en la dirección perpendicular a la longitud de la cuerda. Por ejemplo, la cuerda podría estar atada a un anillo ligero que se desliza sin fricción en una varilla perpendicular a la cuerda, como en la figura 15.19b. El anillo y la varilla mantienen la tensión pero no ejercen una fuerza transversal. Cuando una onda llega a este extremo libre, el anillo se desliza por la varilla. El anillo alcanza un desplazamiento máximo y tanto él como la cuerda se detienen momentáneamente, como en el cuarto dibujo de la figura15.19b. La cuerda ahora está estirada, aumentando la tensión, así que el extremo libre de la cuerda es llevado otra vez hacia abajo, produciéndose otra vez un pulso reflejado (dibujo 7). Como en el caso del extremo fijo, el pulso reflejado se mueve en dirección opuesta a la del pulso inicial, pero ahora la dirección del desplazamiento es la misma que en el pulso inicial. Las condiciones en el extremo de la cuerda, como un soporte rígido o la ausencia total de fuerza transversal, se denominan **condiciones de frontera**.

La formación del pulso reflejado es similar al traslape de dos pulsos que viajan en direcciones opuestas. La figura 15.20 muestra dos pulsos con la misma forma, una invertida con respecto a la otra, que viajan en direcciones opuestas. Al traslaparse los pulsos y pasarse mutuamente, el desplazamiento total de la cuerda es la *suma algebraica* de los desplazamientos en ese punto en los pulsos individuales. Puesto que estos dos pulsos tienen la misma forma, el desplazamiento total en el punto O a la mitad de la figura es cero en todo momento. Así, el movimiento de la mitad derecha de la cuerda sería el mismo si cortáramos la cuerda en el punto O, desecháramos el lado derecho, y sostuviéramos el extremo en O fijo. Así, los dos pulsos del lado izquierdo corresponden a los pulsos incidente y reflejado, combinándose de modo que el desplazamiento total en O *siempre* sea cero. Para que esto ocurra, el pulso reflejado debe estar invertido relativo al pulso incidente.

La figura 15.21 muestra dos pulsos con la misma forma, que viajan en direcciones opuestas pero *no* invertidas entre sí. El desplazamiento en O a la mitad de la figura no es cero, pero la pendiente de la cuerda en este punto siempre es cero. Según la ecuación (15.20), esto corresponde a la ausencia de fuerza transversal en este punto. En tal caso, el movimiento de la mitad derecha de la cuerda sería el mismo que si cortáramos la cuerda en O y ancláramos el extremo con un anillo deslizante sin fricción (figura 15.19b) que mantiene la tensión sin ejercer fuerza transversal. En otras palabras, esta situación corresponde a la reflexión de un pulso en un extremo libre de una cuerda en el punto O. En este caso, el pulso reflejado *no* se invierte.

Principio de superposición

Combinar los desplazamientos de los pulsos individuales en cada punto para obtener el desplazamiento real es un ejemplo del **principio de superposición**: cuando dos ondas se traslapan, el desplazamiento real de cualquier punto de la cuerda en cualquier instante se obtiene sumando el desplazamiento que tendría el punto si sólo estuviera presente la primera onda, con el desplazamiento que tendría si sólo estuviera presente la segunda. Dicho de otro modo, la función de onda $y(x, t)$ que describe el movimiento resultante en esta situación se obtiene *sumando* las dos funciones de onda de las ondas individuales.

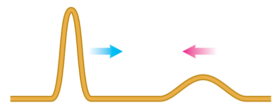
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \qquad \text{(principio de superposición)} \qquad (15.27)$$

Matemáticamente, esta propiedad aditiva es consecuencia de la forma de la ecuación de onda, ecuación (15.12) o (15.18), que toda onda físicamente posible debe satisfacer. Específicamente, la ecuación de onda es *lineal*; es decir, sólo contiene la función $y(x, t)$ a la primera potencia (no hay términos en $y(x, t)^2$, $y(x, t)^{1/2}$, etcétera). Por lo tanto, si cualesquiera dos funciones $y_1(x, t)$ y $y_2(x, t)$ satisfacen la ecuación de onda por separado, su suma $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ también la satisface y por ello es un movimiento físicamente posible. Puesto que este principio depende de la linealidad de la ecuación de onda y la propiedad de combinación lineal correspondiente de sus soluciones, también se denomina *principio de superposición lineal*. En algunos sistemas físicos, como un medio que no obedece la ley de Hooke, la ecuación de onda *no* es lineal, y el principio no se cumple.

El principio de superposición es muy importante para todo tipo de ondas. Si un amigo nos habla mientras escuchamos música, podemos distinguir el sonido de su voz del sonido de la música. Esto es precisamente porque la onda sonora total que llega a nuestros oídos es la suma algebraica de la onda producida por la voz del amigo y la producida por los altavoces (bocinas) de su equipo modular. Si dos ondas sonoras *no* se combinaran de esta sencilla forma lineal, el sonido que oiríamos en esta situación sería una revoltura incomprensible. La superposición también se aplica a las ondas electromagnéticas (como la luz) y de muchos otros tipos.

Evalúe su comprensión de la sección 15.6 La figura 15.22 muestra dos pulsos de onda con diferente forma que viajan en direcciones opuestas por una cuerda. Haga una serie de dibujos como los de la figura 15.21 que muestren la forma de la cuerda al aproximarse, traslaparse y pasarse los dos pulsos.

15.22 Dos pulsos de onda con diferente forma.



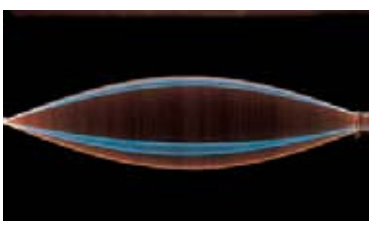
15.7 Ondas estacionarias en una cuerda

Hemos hablado de la reflexión de un *pulso* de onda en una cuerda cuando llega a una frontera (un extremo fijo o libre). Veamos ahora lo que sucede cuando una onda *senoidal* es reflejada por un extremo fijo de una cuerda. Otra vez enfocaremos el problema considerando la superposición de dos ondas que se propagan por la cuerda, una que representa la onda original o incidente, y otra que representa la onda reflejada en el extremo fijo.

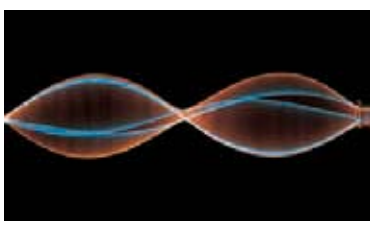
La figura 15.23 muestra una cuerda fija en su extremo izquierdo. El extremo derecho se sube y baja en movimiento armónico simple para producir una onda que viaja a la izquierda; la onda reflejada del extremo fijo viaja a la derecha. El movimiento resultante cuando se combinan las dos ondas ya no parece dos ondas que viajan en direcciones opuestas. La cuerda parece subdividirse en segmentos, como

15.23 a) a d) Exposiciones sucesivas de ondas estacionarias en una cuerda estirada. De *a*) a *d*), la frecuencia de oscilación del extremo derecho aumenta, y la longitud de la onda estacionaria disminuye. e) Los extremos del movimiento de la onda estacionaria de *b*), con nodos en el centro y en los extremos. El extremo derecho de la cuerda se mueve muy poco en comparación con los antinodos, así que es prácticamente un nodo.

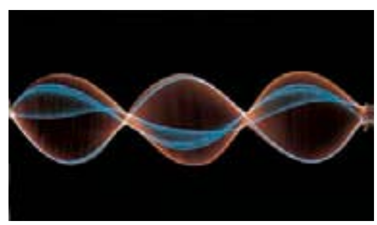
a) La cuerda tiene media longitud de onda



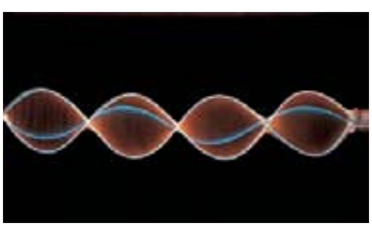
b) La cuerda es de una longitud de onda



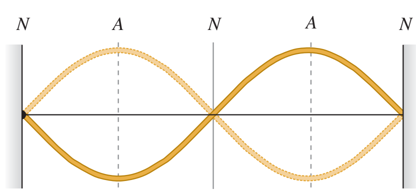
c) La cuerda es de una y media longitudes de onda



d) La cuerda es de dos longitudes de onda



e) La forma de la cuerda en b) en dos instantes diferentes



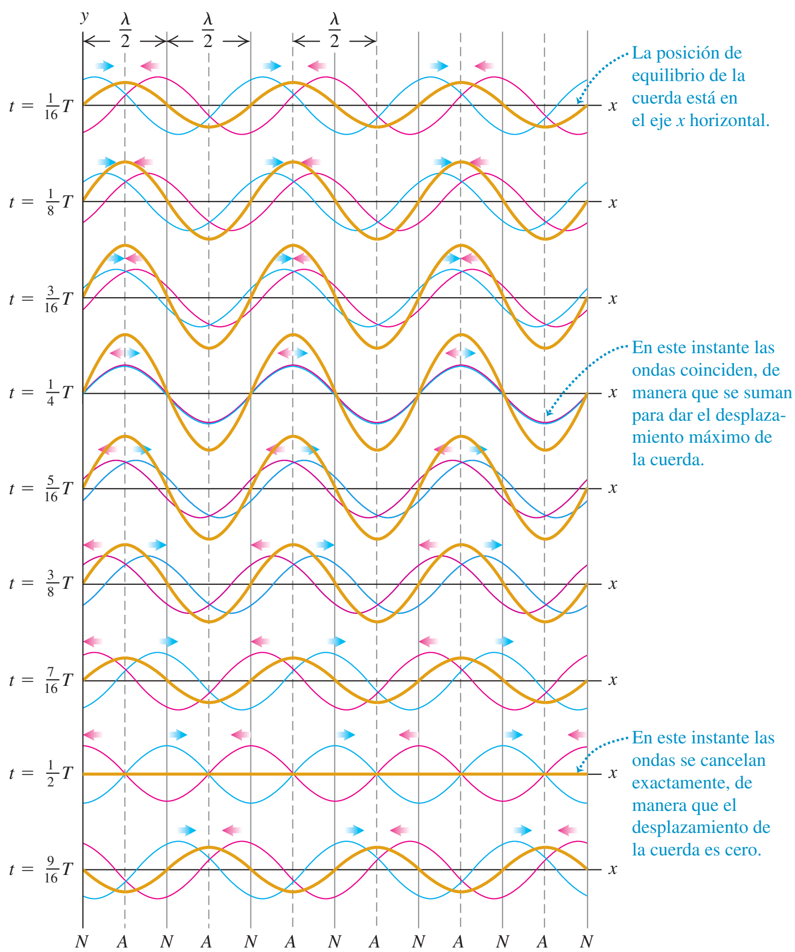
N = **nodos**: puntos donde la cuerda nunca se mueve.

A = **antinodos**: puntos donde la amplitud del movimiento de la cuerda es máximo.

en las exposiciones de tiempo de las figuras 15.23a, 15.23b, 15.23c y 15.23d. La figura 15.23e muestra dos formas instantáneas de la cuerda de la figura 15.23b. Comparemos este comportamiento con las ondas que estudiamos en las secciones 15.1 a 15.5. En una onda que viaja por la cuerda, la amplitud es constante y el patrón de la onda se mueve con rapidez igual a la rapidez de la onda. Aquí, en cambio, el patrón de la onda permanece en la misma posición en la cuerda, y su amplitud fluctúa. Hay ciertos puntos llamados **nodos** (rotulados con N en la figura 15.23e) que nunca se mueven. A la mitad del camino entre los nodos hay puntos llamados **antinodos** (rotulados con A en la figura 15.23e) donde la amplitud de movimiento es máxima. Dado que el patrón no parece estarse moviendo a lo largo de la cuerda, se denomina **onda estacionaria**. (Para enfatizar la diferencia, una onda que *sí* se mueve por la cuerda es una **onda viajera**.)

El principio de superposición explica cómo la onda incidente y la reflejada se combinan para formar una onda estacionaria. En la figura 15.24, las curvas rojas indican una onda que viaja a la izquierda. La curvas azules muestran una onda que viaja a la derecha con la misma rapidez de propagación, longitud de onda y amplitud. Las ondas se muestran en nueve instantes, separados por un $\frac{1}{16}$ de periodo. En cada punto de la cuerda, sumamos los desplazamientos (valores de y) para las dos ondas individuales; el resultado es la onda total en la cuerda, dibujada en color marrón.

15.24 Formación de una onda estacionaria. Una onda que viaja a la izquierda (curvas rojas) se combina con otra que viaja a la derecha (curvas azules) para formar una onda estacionaria (curvas marrón).



En ciertos instantes, como $t = \frac{1}{4}T$, los dos patrones de onda están exactamente en fase entre sí, y la forma de la cuerda es una curva senoidal con el doble de amplitud que las ondas individuales. En otros instantes, como $t = \frac{1}{2}T$, las dos ondas están totalmente desfasadas y la onda total en ese instante es cero. El desplazamiento resultante *siempre* es cero en los lugares marcados con N en la base de la figura 15.24. Éstos son los *nodos*. En un nodo, los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son iguales y opuestos, y se cancelan. Esta cancelación se llama **interferencia destructiva**. A la mitad del camino entre los nodos están los puntos de *máxima* amplitud o *antinodos*, marcados con A. En los antinodos, los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son idénticos, dando un desplazamiento resultante grande; este fenómeno se llama **interferencia constructiva**. Podemos ver que la distancia entre nodos o antinodos sucesivos es media longitud de onda, $\lambda/2$.

Podemos deducir una función de onda para la onda estacionaria de la figura 15.24, sumando las funciones de onda $y_1(x, t)$ y $y_2(x, t)$ para dos ondas con amplitud, periodo y longitud de onda iguales que viajan en direcciones opuestas. Aquí, $y_1(x, t)$ (las curvas rojas de la figura 15.24) representa una onda *incidente* que viaja a la izquierda por el eje $+x$, llegando al punto $x = 0$ y reflejándose; $y_2(x, t)$ (las curvas azules de la figura 15.24) representa la onda *reflejada* que viaja a la derecha desde $x = 0$. En la sección 15.6 señalamos que la onda reflejada del extremo fijo de una cuerda se invierte, así que anteponemos un signo negativo a una de las ondas:

$$y_1(x, t) = -A\cos(kx + \omega t) \qquad \text{(onda incidente que viaja a la izquierda)}$$

$$y_2(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad \text{(onda reflejada que viaja a la derecha)}$$

Observe también que el cambio de signo corresponde a un *desfasamiento* de 180° o π radianes. En $x = 0$, el movimiento de la onda reflejada es $A \cos \omega t$; y el de la incidente, $-A \cos \omega t$, que también podemos escribir como $A \cos (\omega t + \pi)$. Por la ecuación (15.27), la función de onda para la onda estacionaria es la suma de las funciones de ondas individuales:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$

Podemos replantear los términos coseno usando las identidades para el coseno de la suma y la diferencia de dos ángulos: $\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \pm \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$. Haciéndolo y combinando términos, obtenemos la función de la onda estacionaria:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = (2A \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{o bien,}$$

$$y(x, t) = (A_{SW} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en } x = 0\text{)} \tag{15.28}$$

La amplitud de la onda estacionaria, A_{SW}, es dos veces la amplitud A de cualquiera de las ondas viajeras originales:

$$A_{SW} = 2A$$

La ecuación (15.28) tiene dos factores: una función de x y una de t. El factor A_{SW} sen kx indica que, en cada instante, la forma de la cuerda es una curva senoidal. No obstante, a diferencia de una onda que viaja por una cuerda, la forma de la onda permanece en la misma posición, oscilando verticalmente según el factor sen ωt. Este comportamiento se muestra gráficamente con las curvas marrón de la figura 15.24. Todos los puntos de la cuerda están en movimiento armónico simple, pero todos los que están entre cualquier par sucesivo de nodos oscilan *en fase*. Esto contrasta con las diferencias de fase entre oscilaciones de puntos adyacentes, que vemos en las ondas que viajan en una dirección.

Podemos usar la ecuación (15.28) para determinar las posiciones de los nodos; éstos son los puntos en los que sen $kx = 0$, de modo que el desplazamiento *siempre* es cero. Esto sucede cuando $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, es decir, usando $k = 2\pi/\lambda$,

$$\begin{aligned} x &= 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \ldots \\ &= 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \end{aligned} \quad \text{(nodos de una onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en } x = 0\text{)} \tag{15.29}$$

En particular, hay un nodo en $x = 0$, como debería ser, ya que este punto es un extremo fijo de la cuerda.

A diferencia de una onda viajera, una onda estacionaria *no* transfiere energía de un extremo al otro. Las dos ondas que la forman transportarían individualmente cantidades iguales de potencia en direcciones opuestas. Hay un flujo local de energía de cada nodo a los antinodos adyacentes, y de regreso; pero la razón *media* de transferencia de energía es cero en todos los puntos. Si el lector evalúa la potencia de onda dada por la ecuación (15.21) usando la función de onda de la ecuación (15.28), encontrará que la potencia media es cero (véase el problema de desafío 15.84).

Estrategia para resolver problemas 15.2 Ondas estacionarias

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Al igual que con las ondas viajeras, resulta útil distinguir entre las cantidades puramente cinemáticas, como la rapidez de onda v, longitud de onda λ y frecuencia f, y las cantidades dinámicas donde intervienen las propiedades del medio, como F y μ para ondas transversales en una cuerda. Una vez que distinga la incógnita, intente determinar si el problema es de naturaleza exclusivamente cinemática o si también intervienen las propiedades del medio.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Al visualizar nodos y antinodos en ondas estacionarias, siempre es útil hacer diagramas. Para una cuerda, podemos dibujar la forma en un instante, y rotular los nodos N y antinodos A. La distancia entre dos nodos o antinodos adyacentes siempre es $\lambda/2$; y entre un nodo y el antinodo adyacente, $\lambda/4$.
2. Decida qué ecuaciones necesitará. La función de onda para la onda estacionaria casi siempre es útil [como la ecuación (15.28)].
3. Se puede calcular la rapidez de onda si se conocen λ y f (o, lo que es equivalente, $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$) o las propiedades del medio (en el caso de una cuerda, F y μ).

EJECUTAR *la solución como sigue:* Despeje las incógnitas utilizando las ecuaciones seleccionadas. Una vez que tenga la función de onda, podrá obtener el valor del desplazamiento y en cualquier punto del medio de la onda (valor de x) y en cualquier instante. Se puede calcular la velocidad de una partícula en el medio de la onda obteniendo la derivada parcial de y con respecto al tiempo. Para calcular la aceleración de la partícula, obtenga la segunda derivada parcial de y con respecto al tiempo.

EVALUAR *la respuesta:* Compare sus respuestas numéricas con su diagrama. Compruebe que la función de onda sea compatible con las condiciones de frontera (por ejemplo, el desplazamiento deberá ser cero en un extremo fijo).

Ejemplo 15.6 Ondas estacionarias en una cuerda de guitarra

Una de las cuerdas de una guitarra está en el eje x cuando está en equilibrio. El extremo en $x = 0$ (el puente de la guitarra) está fijo. Una onda senoidal incidente (correspondiente a las curvas rojas de la figura 15.24) viaja por la cuerda en la dirección $-x$ a 143.0 m/s, con amplitud de 0.750 mm y frecuencia de 440 Hz. Esta onda se refleja del extremo fijo en $x = 0$, y la superposición de las ondas viajeras incidente y reflejada forma una onda estacionaria. *a*) Obtenga la ecuación que da el desplazamiento de un punto de la cuerda en función de la posición y el tiempo. *b*) Encuentre los puntos de la cuerda que no se mueven. *c*) Calcule la amplitud, la velocidad transversal máxima y la aceleración transversal máxima en los puntos de máxima oscilación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de *cinemática* donde nos piden describir el movimiento de la cuerda (véase la Estrategia para resolver problemas 15.1 de la sección 15.3). Ahora, las incógnitas son la función de onda de la onda estacionaria [inciso *a*)], la ubicación de los puntos que no se mueven [*nodos*, inciso *b*)] y los valores máximos de desplazamiento y, velocidad transversal v_y y aceleración transversal a_y [inciso *c*)]. (Las ondas en una cuerda son ondas transversales, así que *transversal* significa “en la dirección del desplazamiento”, es decir, en la dirección y.) Para obtener estas cantidades, usamos la expresión que dedujimos en esta sección para una onda estacionaria en una cuerda con un extremo fijo, así como otras relaciones de las secciones 15.2 y 15.3.

PLANTEAR: Puesto que hay un extremo fijo en $x = 0$, podemos usar las ecuaciones (15.28) y (15.29) para describir esta onda estacionaria. También usaremos las relaciones entre ω, k, f, λ y la rapidez de onda v.

EJECUTAR: *a*) Para usar la ecuación (15.28), necesitamos los valores de A_{SW}, ω y k. La amplitud de la onda incidente es $A = 0.750 \text{ mm} =$

7.50×10^{-4} m; la onda reflejada tiene la misma amplitud, y la amplitud de la onda estacionaria es $A_{SW} = 2A = 1.50 \times 10^{-3}$ m. La frecuencia angular ω y el número de onda k son

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(440 \text{ s}^{-1}) = 2760 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2760 \text{ rad/s}}{143 \text{ m/s}} = 19.3 \text{ rad/m}$$

Entonces, la ecuación (15.28) da

$$\begin{aligned} y(x, t) &= (A_{SW} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \\ &= [(1.50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \operatorname{sen}(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

b) Las posiciones de los *nodos* están dadas por la ecuación (15.29): $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \ldots$. La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{143 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0.325 \text{ m}$$

así que los nodos estarán a estas distancias del extremo fijo:

$$x = 0, 0.163 \text{ m}, 0.325 \text{ m}, 0.488 \text{ m}, \ldots$$

c) Por la expresión del inciso *a*) para $y(x, t)$, vemos que el desplazamiento máximo con respecto al equilibrio es 1.50×10^{-3} m $= 1.50$ mm, que es dos veces la amplitud de la onda incidente. Este máximo se da en los *antinodos*, que están a medio camino entre nodos adyacentes (es decir, en $x = 0.081$ m, 0.244 m, 0.406 m, …).

Para una partícula de la cuerda en cualquier punto x, la velocidad transversal (en la dirección y) es

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \\ &= [(1.50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \\ &\quad \times [(2760 \text{ rad/s}) \cos(2760 \text{ rad/s})t] \\ &= [(4.15 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \cos(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

En un antinodo, $\operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x = \pm 1$, y el valor de la velocidad transversal varía entre 4.15 m/s y −4.15 m/s. Como sucede siempre en movimiento armónico simple, la velocidad máxima se da cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio ($y = 0$).

La aceleración transversal $a_y(x, t)$ es la primera derivada parcial de $v_y(x, t)$ con respecto a t (es decir, la *segunda* derivada parcial de $y(x, t)$ con respecto al tiempo). Dejamos el cálculo al lector; el resultado es

$$\begin{aligned} a_y(x, t) &= \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \\ &= [(-1.15 \times 10^4 \text{ m/s}^2) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \\ &\quad \times \operatorname{sen}(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

En los antinodos, el valor de la aceleración transversal varía entre $+1.15 \times 10^4 \text{ m/s}^2$ y $-1.15 \times 10^4 \text{ m/s}^2$.

EVALUAR: La velocidad transversal máxima en un antinodo es muy respetable (unos 15 km/h o unas 9.3 mi/h); pero la aceleración transversal máxima es formidable: ¡1170 veces la aceleración debida a la gravedad! Las cuerdas de guitarra se hacen de material resistente para aguantar semejante aceleración.

En realidad, las cuerdas de guitarra se fijan en *ambos* extremos. Veremos las consecuencias de esto en la sección siguiente.

Evalúe su comprensión de la sección 15.7 Suponga que se duplica la frecuencia de la onda estacionaria del ejemplo 15.6, de 440 Hz a 880 Hz. ¿Todos los nodos con $f = 440$ Hz serían también nodos con $f = 880$ Hz? Si es así, ¿habría nodos adicionales con $f = 880$ Hz? Si no, ¿qué nodos faltan con $f = 880$ Hz?

15.8 Modos normales de una cuerda

ActivPhysics ONLINE

10.4 Ondas estacionarias en cuerdas
10.5 Afinación de un instrumento de cuerda: ondas estacionarias
10.6 Masa de una cuerda y ondas estacionarias

Hemos descrito ondas estacionarias en una cuerda sujeta rígidamente por un extremo, como en la figura 15.23. No supusimos nada acerca de la longitud de la cuerda ni de lo que sucedía en el otro extremo. Consideremos ahora una cuerda de longitud definida L, sujeta rígidamente en *ambos* extremos. Tales cuerdas se encuentran en muchos instrumentos musicales, como pianos, violines y guitarras. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se produce una onda en ella; esta onda se refleja una y otra vez en los extremos de la cuerda, formando una onda estacionaria. Ésta, a la vez, produce una onda sonora en el aire, cuya frecuencia está determinada por las propiedades de la cuerda. Esto es lo que hace a los instrumentos de cuerda tan útiles para producir música.

Para entender estas propiedades de las ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos, veamos primero lo que sucede cuando establecemos una onda senoidal en una cuerda así. La onda estacionaria que resulta debe tener un nodo en *ambos* extremos de la cuerda. En la sección anterior, vimos que dos nodos adyacentes están separados media longitud de onda ($\lambda/2$), así que la longitud de la cuerda debe ser $\lambda/2$, o $2(\lambda/2)$, o $3(\lambda/2)$ o, en general, un número entero de medias longitudes de onda:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \qquad (15.30)$$

15.25 Cada cuerda de un violín oscila naturalmente en una o más de sus frecuencias armónicas, produciendo en el aire ondas sonoras con las mismas frecuencias.

Esto es, si una cuerda de longitud L está fija en ambos extremos, sólo puede existir una onda estacionaria si su longitud de onda satisface la ecuación (15.30).

Despejando λ de esta ecuación y denotando los posibles valores de λ con λ_n, tenemos

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.31}$$

Pueden existir ondas en la cuerda si la longitud de onda *no* es igual a uno de estos valores; sin embargo, no puede haber un patrón de onda estable con nodos y antinodos, y la onda total no puede ser estacionaria. Las ondas estacionarias de las figuras 15.23a, 15.23b, 15.23c y 15.23d ilustran la ecuación (15.31); éstas representan $n = 1$, 2, 3 y 4, respectivamente.

A la serie de posibles longitudes de onda estacionaria λ_n corresponde una serie de posibles frecuencias de onda estacionaria f_n, cada una relacionada con su longitud de onda correspondiente por $f_n = v/\lambda_n$. La frecuencia más pequeña f_1 corresponde a la longitud de onda más grande (el caso $n = 1$), $\lambda_1 = 2L$:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.32}$$

Ésta se llama **frecuencia fundamental**. Las otras frecuencias de onda estacionaria son $f_2 = 2v/2L$, $f_3 = 3v/2L$, etcétera. Todas éstas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental f_1, como $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$, y así sucesivamente, y podemos expresar *todas* las frecuencias como

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.33}$$

Estas frecuencias se llaman **armónicos**, y la serie es una **serie armónica**. Algunos músicos llaman a f_2, f_3, etcétera, **sobretonos**; f_2 es el segundo armónico o el primer sobretono, f_3 es el tercer armónico o el segundo sobretono, y así sucesivamente. El primer armónico es la frecuencia fundamental (figura 15.25).

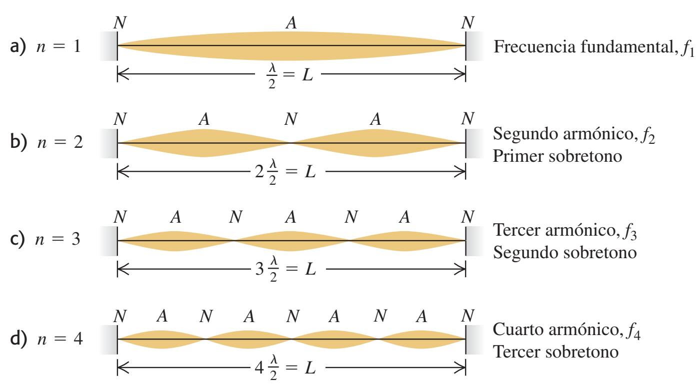
Para una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, la función de onda $y(x, t)$ de la n-ésima onda estacionaria está dada por la ecuación (15.28) (que satisface la condición de que haya un nodo en $x = 0$), con $\omega = \omega_n = 2\pi f_n$ y $k = k_n = 2\pi/\lambda_n$:

$$y_n(x, t) = A_{SW} \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} \omega_n t \tag{15.34}$$

Es fácil demostrar que esta función de onda tiene nodos en $x = 0$ y $x = L$, como debe ser.

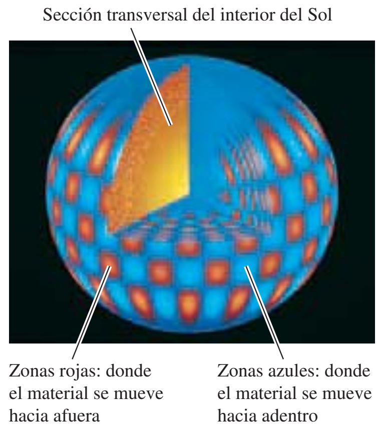
Un **modo normal** de un sistema oscilante es un movimiento en el que todas las partículas del sistema se mueven senoidalmente con la misma frecuencia. En el caso de un sistema compuesto por una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, cada una de las longitudes de onda dadas por la ecuación (15.31) corresponde al patrón y a la frecuencia de un posible modo normal. Hay un número infinito de modos normales, cada uno con su frecuencia y patrón de vibración característicos. La figura 15.26 muestra los primeros cuatro patrones de modo normal y sus respectivas frecuencias

15.26 Los primeros cuatro modos normales de una cuerda fija en ambos extremos. (Compare éstos con las fotografías de la figura 15.23.)



y longitudes de onda, que corresponden a la ecuación (15.34) con $n = 1, 2, 3$ y 4. En contraste, un oscilador armónico, que sólo tiene una partícula oscilante, tiene un solo modo normal y una sola frecuencia característica. La cuerda fija en ambos extremos tiene un número infinito de modos normales, porque se compone de un número muy grande (efectivamente infinito) de partículas. Otros sistemas oscilantes más complejos también tienen una infinidad de modos normales, aunque con patrones más complejos de modo normal que una cuerda (figura 15.27).

15.27 Los astrónomos han descubierto que el Sol oscila en varios modos normales distintos. En esta simulación por computadora muestra de uno de esos modos.



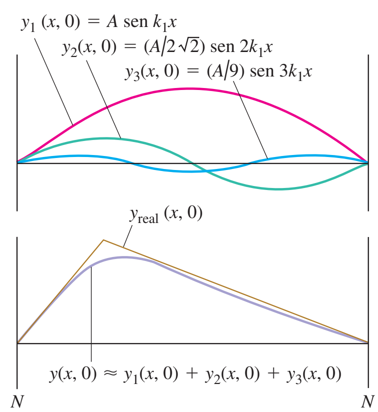
Ondas estacionarias complejas

Si pudiéramos desplazar una cuerda de modo que su forma tuviera la de uno de los patrones de modo normal, y luego soltarla, vibraría con la frecuencia de ese modo. Tal cuerda vibrante desplazaría el aire circundante con la misma frecuencia, produciendo una onda sonora senoidal viajera que nuestro oído percibiría como un tono puro. Sin embargo, cuando una cuerda se golpea (como en un piano) o pulsa (como en una guitarra), la forma de la cuerda desplazada *no* es tan sencilla como uno de los patrones de la figura 15.26. En la vibración resultante están presentes la frecuencia fundamental y muchos sobretonos. Por lo tanto, ese movimiento es una combinación o *superposición* de muchos modos normales. Varios movimientos armónicos simples de diferentes frecuencias están presentes simultáneamente, y el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda es la suma (o superposición) de los desplazamientos asociados a los modos individuales. El sonido producido por la cuerda vibrante es igualmente una superposición de ondas sonoras senoidales viajeras, que percibimos como un tono rico y complejo con la frecuencia fundamental f_1. La onda estacionaria en la cuerda y la onda sonora viajera en el aire tienen el mismo **contenido armónico** (el grado en que están presentes frecuencias más altas que la fundamental). El contenido armónico depende de cómo se pone en movimiento inicialmente la cuerda. Si pulsamos las cuerdas de una guitarra acústica en el lugar normal sobre el agujero, el sonido tiene diferente contenido armónico, que si las pulsamos cerca del extremo fijo en el cuerpo de la guitarra.

ActivPhysics ONLINE
10.10 Ondas complejas: análisis de Fourier

Es posible representar cada posible movimiento de la cuerda como una superposición de movimientos de modo normal. Encontrar esta representación para un patrón de vibración dado se denomina *análisis armónico*. La suma de funciones senoidales que representa una onda compleja se llama *serie de Fourier*. La figura 15.28 muestra cómo una onda estacionaria que se produce pulsando una cuerda de guitarra de longitud L en un punto a $L/4$ de un extremo puede representarse como una combinación de funciones senoidales.

15.28 Cuando se pulsa una cuerda de guitarra (dándole una forma triangular) y se suelta, se produce una onda estacionaria. Esa onda se representa bien (excepto en el punto máximo agudo) con la suma de sólo tres funciones senoidales. Si incluimos funciones senoidales adicionales, mejora aún más la representación.



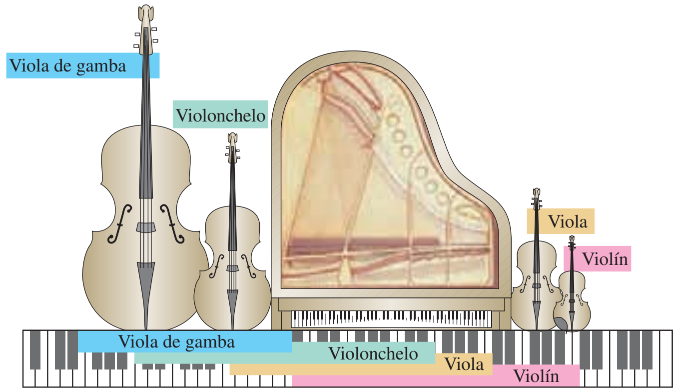
Ondas estacionarias e instrumentos de cuerda

Como hemos visto, la frecuencia fundamental de una cuerda que vibra es $f_1 = v/2L$. La rapidez v de las ondas en la cuerda está determinada por la ecuación (15.13), $v = \sqrt{F/\mu}$. Combinando éstas, vemos que

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \qquad (15.35)$$

Ésta también es la frecuencia fundamental de la onda sonora creada en el aire circundante por la cuerda al vibrar. Los instrumentos musicales comunes muestran cómo f_1 depende de las propiedades de la cuerda. Las cuerdas largas de un contrabajo o de la sección grave (de baja frecuencia) de un piano y las cuerdas más cortas del violín o de la sección aguda de un piano ilustran la dependencia inversa de la frecuencia con respecto a la longitud L (figura 15.29). El tono de un violín o una guitarra normalmente se varía presionando las cuerdas contra el bastidor con los dedos para cambiar la longitud L de la porción vibrante de la cuerda. Al aumentar la tensión F, aumenta la rapidez de la onda v y, por lo tanto, la frecuencia (y el tono). Todos los instrumentos de cuerda se "afinan" a las frecuencias correctas variando la tensión; se aprieta la cuerda para aumentar el tono. Por último, al aumentar la masa por unidad de longitud μ, disminuye la rapidez de la onda y, por lo tanto, la frecuencia. Las notas más bajas de una

15.29 Comparación de la gama de un piano de cola para concierto, con las gamas de una viola de gamba, un violonchelo, una viola y un violín. En todos los casos, las cuerdas más largas producen notas graves y las más cortas producen notas agudas.



guitarra se producen con cuerdas más gruesas, y una razón para devanar las cuerdas graves de un piano con alambre es obtener la baja frecuencia deseada sin usar una cuerda demasiado larga.

Los instrumentos de viento, como los saxofones y los trombones, tienen también modos normales. En los instrumentos de cuerda, las frecuencias de estos modos normales determinan los tonos musicales que producen estos instrumentos. En el capítulo 16 trataremos estos instrumentos y muchos otros aspectos del sonido.

Ejemplo 15.7 Contrabajo gigante

En un intento por entrar en el *Libro Guiness de récords mundiales*, usted se propone construir un contrabajo con cuerdas de 5.00 m de longitud entre puntos fijos. Una cuerda tiene densidad lineal de masa de 40.0 g/m y una frecuencia fundamental de 20.0 Hz (la frecuencia más baja que puede detectar el oído humano). Calcule *a*) la tensión de esta cuerda, *b*) la frecuencia y la longitud de onda del segundo armónico en la cuerda, y *c*) la frecuencia y la longitud de onda del segundo sobretono en la cuerda.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita en el inciso *a*) es la tensión de la cuerda; la obtendremos de la expresión para la frecuencia fundamental de la cuerda, en la que interviene la tensión. En los incisos *b*) y *c*), las incógnitas son la frecuencia y la longitud de onda de diferentes armónicos. Las determinaremos a partir de la longitud dada de la cuerda y la frecuencia fundamental.

PLANTEAR: La ecuación que usaremos en el inciso *a*) es la ecuación (15.35); en ella intervienen los valores que conocemos de f_1, L y μ, así como la incógnita F. Resolveremos los incisos *b*) y *c*) usando las ecuaciones (15.31) y (15.33).

EJECUTAR: *a*) Despejamos la tensión de la cuerda F de la ecuación (15.35):

$$F = 4\mu L^2 f_1^2 = 4(40.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(5.00\ \text{m})^2(20.0\ \text{s}^{-1})^2$$
$$= 1600\ \text{N} = 360\ \text{lb}$$

b) El segundo armónico corresponde a $n = 2$. Por la ecuación (15.33), su frecuencia es

$$f_2 = 2f_1 = 2(20.0\ \text{Hz}) = 40.0\ \text{Hz}$$

Por la ecuación (15.31) la longitud de onda del segundo armónico en la cuerda es

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = 5.00\ \text{m}$$

c) El segundo sobretono es el "segundo tono sobre" (arriba de) la fundamental, es decir, $n = 3$. Su frecuencia y longitud de onda son

$$f_3 = 3f_1 = 3(20.0\ \text{Hz}) = 60.0\ \text{Hz}$$
$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = 3.33\ \text{m}$$

EVALUAR: En el inciso *a*) la tensión es un poco mayor que en un contrabajo real, en el que la tensión normal de las cuerdas es de unos cuantos cientos de newtons. Las longitudes de onda de los incisos *b*) y *c*) son iguales a la longitud de la cuerda y dos tercios de esa longitud, respectivamente; estos resultados concuerdan con los dibujos de ondas estacionarias de la figura 15.26.

Ejemplo 15.8 De ondas en una cuerda a ondas sonoras en el aire

Calcule la frecuencia y longitud de onda de las ondas sonoras que se producen en el aire cuando la cuerda del ejemplo anterior vibra a su frecuencia fundamental. La rapidez del sonido en aire a 20 °C es de 344 m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las incógnitas son f y λ de la onda sonora producida por el contrabajo, *no* de la onda estacionaria en la cuerda. Sin embargo, cuando la cuerda vibra a una frecuencia dada, el aire circundante tiene que vibrar a la misma frecuencia, así que la frecuencia de la onda sonora es la misma que la de la onda estacionaria en la cuerda. Sin embargo, la relación $\lambda = v/f$ indica que la *longitud de onda* de la onda sonora normalmente es diferente de la de la onda estacionaria en la cuerda, porque las dos ondas tienen diferente rapidez.

PLANTEAR: La única ecuación que necesitamos es $v = \lambda f$, que aplicaremos tanto a la onda estacionaria en la cuerda (rapidez v_{cuerda}) como a la onda sonora viajera (rapidez v_{sonido}).

EJECUTAR: La frecuencia de la onda sonora es la misma que la frecuencia fundamental de la onda estacionaria: $f = f_1 = 20.0$ Hz. La longitud de onda de la onda sonora es

$$\lambda_{1(\text{sonido})} = \frac{v_{\text{sonido}}}{f_1} = \frac{344 \text{ m/s}}{20.0 \text{ Hz}} = 17.2 \text{ m}$$

EVALUAR: Observe que $\lambda_{1(\text{sonido})}$ es mayor que la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda, $\lambda_{1(\text{cuerda})} = 2L = 2(5.00 \text{ m}) = 10.0$ m. Básicamente, esto se debe a que la rapidez del sonido es mayor que la rapidez de las ondas en la cuerda, $v_{\text{cuerda}} = \lambda_{1(\text{sonido})} f_1 = (10.0 \text{ m})(20.0 \text{ Hz}) = 200$ m/s. Por lo tanto, para *cualquier* modo normal en esta cuerda, la onda sonora que se produce tiene la misma frecuencia que la onda en la cuerda, pero una longitud de onda mayor por un factor de $v_{\text{sonido}}/v_{\text{cuerda}} = (344 \text{ m/s})/(200 \text{ m/s}) = 1.72$.

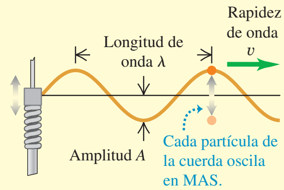
Evalúe su comprensión de la sección 15.8 Mientras vibra una cuerda de guitarra, se toca suavemente el punto medio de la cuerda para asegurar que la cuerda no vibre en ese punto. ¿Cuáles modos normales *no pueden* estar presentes en la cuerda cuando se está tocando de este modo?

CAPÍTULO 15 RESUMEN

Ondas y sus propiedades: Una onda es cualquier perturbación con respecto a una condición de equilibrio que se propaga de una región a otra. Una onda mecánica siempre viaja dentro de un material llamado medio. La perturbación ondulatoria se propaga con la rapidez de onda v, que depende del tipo de onda y de las propiedades del medio.

En una onda periódica, el movimiento de cada punto del medio es periódico. Una onda senoidal es una onda periódica especial, donde todos los puntos tienen movimiento armónico simple. La frecuencia f de cualquier onda periódica es el número de ciclos por unidad de tiempo, el periodo T es el tiempo que dura un ciclo, la longitud de onda λ es la distancia en la que se repite el patrón de la onda, y la amplitud A es el desplazamiento máximo de una partícula en el medio. El producto de λ y f es igual a la rapidez de la onda. (Véase el ejemplo 15.1.)

$$v = \lambda f \qquad (15.1)$$



Funciones de onda y dinámica de onda: La función de onda $y(x, t)$ describe los desplazamientos de partículas individuales del medio. Las ecuaciones (15.3), (15.4) y (15.7) dan la ecuación de una onda senoidal que viaja en la dirección $+x$. Si la onda se mueve en la dirección $-x$, el signo menos de las funciones coseno se cambia por un signo más. (Véase el ejemplo 15.2.)

La función de onda debe obedecer una ecuación diferencial parcial llamada ecuación de onda, ecuación (15.12).

La rapidez de una onda transversal en una cuerda depende de la tensión F y de la masa por unidad de longitud μ. (Véase el ejemplo 15.3.)

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right]$$

$$= A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right) \qquad (15.3)$$

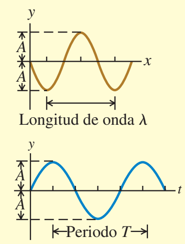
$$y(x, t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \qquad (15.4)$$

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad (15.7)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f = vk$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \qquad (15.12)$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{(ondas en una cuerda)} \qquad (15.13)$$



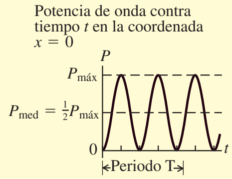
Potencia de onda: El movimiento ondulatorio transporta energía de una región a otra. En el caso de una onda mecánica senoidal, la potencia media P_{med} es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de la frecuencia. En el caso de ondas que se propagan en tres dimensiones, la intensidad de la onda I es inversamente proporcional a la distancia de la fuente. (Véanse los ejemplos 15.4 y 15.5.)

$$P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \qquad (15.25)$$

(potencia media, onda senoidal)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad (15.26)$$

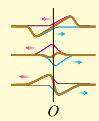
(ley del inverso del cuadrado para la intensidad)



Superposición de ondas: Una onda que llega a una frontera del medio de propagación se refleja. El principio de superposición indica que el desplazamiento de onda total en cualquier punto donde se traslapan dos o más ondas es la suma de los desplazamientos de las ondas individuales.

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad (15.27)$$

(principio de superposición)



Ondas estacionarias sobre una cuerda: Cuando una onda senoidal se refleja de un extremo fijo o libre de una cuerda estirada, las ondas incidente y reflejada se combinan para formar una onda senoidal estacionaria que contiene nodos y antinodos. Dos nodos adyacentes están separados una distancia $\lambda/2$, lo mismo que dos antinodos adyacentes. (Véase el ejemplo 15.6.)

Si ambos extremos de una cuerda con longitud L están fijos, sólo puede haber ondas estacionarias si L es un múltiplo entero de $\lambda/2$. Cada frecuencia y su patrón de vibración asociado se denomina modo normal. La frecuencia más baja f_1 es la frecuencia fundamental. (Véanse los ejemplos 15.7 y 15.8.)

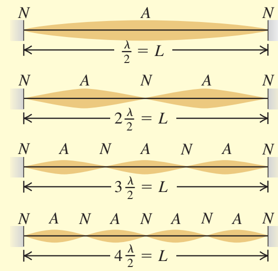
$$y(x, t) = (A_{SW}\,\mathrm{sen}\,kx)\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad (15.28)$$

(onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en $x = 0$)

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (15.33)$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (15.35)$$

(cuerda fija en ambos extremos)



Términos clave

onda mecánica, *488*
medio, *488*
onda transversal, *488*
onda longitudinal, *488*
rapidez de la onda, *489*
onda periódica, *489*
onda senoidal, *489*
longitud de onda, *490*
función de onda, *492*
número de onda, *493*
fase, *494*
ecuación de onda, *497*
intensidad, *504*
interferencia, *505*
condición de frontera, *506*
principio de superposición, *506*
nodo, *508*
antinodo, *508*
onda estacionaria, *508*
onda viajera, *508*
interferencia destructiva, *509*
interferencia constructiva, *509*
frecuencia fundamental, *512*
armónicos, *512*
serie armónica, *512*
sobretono, *512*
modo normal, *512*
contenido armónico, *513*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La potencia de una onda mecánica depende de su frecuencia y su amplitud [véase la ecuación (15.25)].

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

15.1 Respuesta: i) La “ola” viaja horizontalmente de un espectador al siguiente en cada fila del estadio, pero el desplazamiento de cada espectador es verticalmente hacia arriba. Puesto que el desplazamiento es perpendicular a la dirección en que viaja la onda, la onda es transversal.

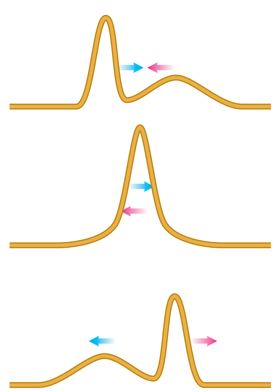
15.2 Respuesta: iv) La rapidez de las ondas en una cuerda, v, no depende de su longitud de onda. Podemos rescribir la relación $v = \lambda f$ como $f = v/\lambda$, la cual nos indica que si se duplica la longitud de onda λ, la frecuencia f se reduce a la mitad.

15.3 Respuestas: a. $\frac{2}{8}T$, b. $\frac{4}{8}T$, c. $\frac{5}{8}T$ Puesto que la onda es senoidal, cada punto en la cuerda oscila en movimiento armónico simple (MAS). Puesto que podemos aplicar todas las ideas del capítulo 13 acerca del MAS a la onda descrita en la figura 15.8. *a*) Una partícula en MAS tiene su rapidez máxima cuando pasa por la posición de equilibrio ($y = 0$ en la figura 15.8). La partícula en el punto A se mueve hacia arriba por tal posición en $t = \frac{2}{8}T$. *b*) En MAS vertical la aceleración máxima *hacia arriba* ocurre cuando una partícula está en su desplazamiento máximo *hacia abajo*. Esto sucede para la partícula en el punto B en $t = \frac{4}{8}T$. *c*) Una partícula en MAS vertical tiene una aceleración *hacia abajo* cuando su desplazamiento es *hacia arriba*. La partícula en C tiene un desplazamiento hacia arriba y se mueve hacia abajo en $t = \frac{5}{8}T$.

15.4 Respuesta: iii) La relación $v = \sqrt{F/\mu}$ [ecuación (15.13)] indica que la rapidez de onda es máxima en una cuerda con densidad lineal de masa mínima. Ésa es la cuerda más delgada, que tiene menor masa m y, por lo tanto, menor densidad lineal de masa $m = \mu/L$ (todas las cuerdas tienen la misma longitud).

15.5 Respuesta: iii), iv), ii), i) La ecuación (15.25) indica que la potencia media es una onda senoidal en una cuerda es $P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2$. Las cuatro cuerdas son idénticas, así que todas tienen la misma masa, la misma longitud y la misma densidad de masa lineal μ la frecuencia f es la misma para cada onda, como la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. Por lo tanto, la potencia de onda media para cada cuerda es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda F y el cuadrado de la amplitud A. En comparación con la cuerda i) la potencia media en cada cuerda es iii) $\sqrt{4} = 2$ veces mayor; ii) $4^2 = 16$ veces mayor; y iv) $\sqrt{2}(2)^2 = 4\sqrt{2}$ veces mayor.

15.6 Respuesta:



15.7 Respuestas: sí, sí Un aumento de la frecuencia al doble reduce la longitud de onda a la mitad. Por lo tanto, el espaciado entre nodos (igual a $\lambda/2$) también es la mitad. Hay nodos en todas las posiciones anteriores, pero también hay un nuevo nodo entre cada par de nodos anteriores.

15.8 Respuesta: $n = 1, 3, 5, \ldots$ Al tocar la cuerda en el centro, se está haciendo que haya un nodo en el centro. Por ello, sólo estarán permitidas ondas estacionarias que tengan un nodo en $x = L/2$. Por la figura 15.26, puede verse que se excluyen los modos normales $n = 1, 3, 5, \ldots$

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P15.1. Dos ondas viajan en la misma cuerda. ¿Es posible para ambas tener *a*) diferentes frecuencias, *b*) diferentes longitudes de onda, *c*) diferentes rapideces, *d*) diferentes amplitudes, *e*) la misma frecuencia, pero diferentes longitudes de onda? Explique su razonamiento.
P15.2. Bajo una tensión F, un pulso tarda 2.00 s en recorrer la longitud de un alambre tensado. ¿Qué tensión se requiere (en términos de F) para que el pulso tarde 6.00 s en hacer ese recorrido?
P15.3. ¿Qué tipos de energía se asocian a las ondas en una cuerda estirada? ¿Cómo podría detectarse experimentalmente tal energía?
P15.4. La amplitud de una onda disminuye gradualmente a medida que la onda viaja por una cuerda larga y estirada. ¿Qué sucede con la energía de la onda en ese caso?
P15.5. Para los movimientos ondulatorios estudiados en el capítulo, ¿la rapidez de propagación depende de la amplitud? ¿Cómo lo sabe?
P15.6. La rapidez de las olas oceánicas depende de la profundidad del agua; cuanto más profunda sea ésta, más rápidamente viajará la ola. Use esto para explicar por qué las olas forman crestas y "rompen" al acercarse a la costa.
P15.7. ¿Es posible tener una onda longitudinal en una cuerda estirada? ¿Por qué? ¿Es posible tener una onda transversal en una varilla de acero? ¿Por qué? En caso de una respuesta afirmativa, explique cómo crearía tal onda.
P15.8. Un eco es sonido reflejado de un objeto distante, como una pared o un risco. Explique cómo determinaría la distancia al objeto cronometrando el eco.
P15.9. ¿Por qué vemos los rayos antes de escuchar el relámpago? Una regla práctica común es comenzar a contar lentamente, una vez por segundo, al ver el relámpago; cuando se oye el trueno, se divide el número entre 3 para obtener la distancia a la que cayó el relámpago, en kilómetros (o dividiendo entre 5 para calcularla en millas). ¿Por qué funciona esto? ¿O no funciona?
P15.10. En el caso de ondas transversales en una cuerda, ¿la rapidez de la onda es la misma que la rapidez de cualquier parte de la cuerda? Explique la diferencia entre ambas rapideces. ¿Cuál es constante?
P15.11. Los niños hacen teléfonos de juguete metiendo cada extremo de un hilo o cordón largo, por un agujero en la base de un vaso de cartón y anudándolo para que no se salga. Si el hilo se tensa, es posible transmitir sonido de un vaso al otro. ¿Cómo funciona esto? ¿Por qué es más fuerte el sonido transmitido que el que viaja por aire a la misma distancia?
P15.12. Las cuatro cuerdas de un violín tienen diferente espesor, pero aproximadamente la misma tensión. ¿Las ondas viajan más rápidamente en las cuerdas gruesas o en las delgadas? ¿Por qué? Compare la frecuencia fundamental de vibración de las cuerdas gruesas y delgadas.
P15.13. Una onda senoidal puede describirse mediante una función coseno, que es negativa tan a menudo como es positiva. Entonces, ¿por qué la potencia media producida por esta onda no es cero?
P15.14. Dos cuerdas con diferente masa por unidad de longitud μ_1 y μ_2 se unen y se estiran con una tensión F. Una onda viaja por la cuerda y pasa por la discontinuidad de μ. Indique cuáles de las siguientes propiedades de la onda serán iguales a ambos lados de la discontinuidad y cuáles cambiarán: rapidez de la onda, frecuencia, longitud de onda. Justifique físicamente cada respuesta.
P15.15. Una cuerda larga con masa m se sujeta del techo y cuelga verticalmente. Se produce un pulso de onda en el extremo inferior, el cual viaja cuerda arriba. ¿La rapidez del pulso cambia al subir por la cuerda y, si lo hace, aumenta o disminuye?
P15.16. En una onda transversal en una cuerda, ¿el movimiento de la cuerda es perpendicular a la longitud? ¿Cómo es posible entonces que se transporte energía a lo largo de la cuerda?
P15.17. Tanto la intensidad de onda como la gravitación obedecen las leyes del cuadrado inverso. ¿Lo hacen por la misma razón? Analice la razón de cada una de estas leyes del cuadrado inverso tan óptimamente como sea posible.
P15.18. Podemos transferir energía por una cuerda con un movimiento ondulatorio; sin embargo, en una onda estacionaria en una cuerda nunca podremos transferir energía más allá de un nodo. ¿Por qué?
P15.19. ¿Podemos producir una onda estacionaria en una cuerda superponiendo dos ondas que viajan en direcciones opuestas con la misma frecuencia pero diferente amplitud? ¿Por qué? ¿Podemos producirla superponiendo dos ondas que viajen en direcciones opuestas con diferente frecuencia, pero la misma amplitud? ¿Por qué?
P15.20. Si estiramos una liga de hule y la punteamos, oímos un tono (más o menos) musical. ¿Cómo cambia la frecuencia de este tono, si estiramos más la liga? (¡Inténtelo!) ¿Concuerda esto con la ecuación (15.35) para una cuerda fija en ambos extremos? Explique su respuesta.
P15.21. Un intervalo musical de una *octava* corresponde a un factor de 2 en frecuencia. ¿En qué factor debe aumentarse la tensión en una cuerda de guitarra o violín para aumentar su tono una octava? ¿Y dos octavas? Explique su razonamiento. ¿Se corre algún riesgo al intentar esos cambios de tono?
P15.22. Si toca una cuerda levemente en su centro mientras la frota con el arco, un violinista puede producir una nota exactamente una octava arriba de aquella para la cual se afinó la cuerda, es decir, una nota con una frecuencia de exactamente el doble. ¿Cómo es posible esto?
P15.23. Como vimos en la sección 15.1, las olas en el agua son una combinación de ondas longitudinales y transversales. Defienda la siguiente afirmación: "Cuando las olas chocan contra una pared vertical, ese punto es un nodo del desplazamiento longitudinal, pero un antinodo del desplazamiento transversal".
P15.24. Los violines son instrumentos cortos, mientras que los violonchelos y los contrabajos son largos. Explique esto en términos de la frecuencia de las ondas que producen.
P15.25. ¿Para qué sirven los trastes de una guitarra? Explique su uso en términos de la frecuencia de la vibración de las cuerdas.

Ejercicios

Sección 15.2 Ondas periódicas

15.1. La rapidez del sonido en aire a 20 °C es de 344 m/s. *a*) Calcule la longitud de onda de una onda sonora con frecuencia de 784 Hz, que corresponde a la nota sol de la quinta octava de un piano, y cuántos milisegundos dura cada vibración. *b*) Calcule la longitud de onda de una onda sonora una octava más alta que la nota del inciso *a*).

15.2. Sonido audible. Siempre que la amplitud sea lo suficientemente grande, el oído humano puede responder a ondas longitudinales dentro de un intervalo de frecuencias que aproximadamente va de los 20.0 Hz a los 20.0 kHz. *a*) Si usted tuviera que marcar el comienzo de cada patrón de onda completo con un punto rojo para el sonido de longitud de onda larga y con un punto azul el sonido de longitud de onda corta, ¿qué distancia habría entre los puntos rojos y qué distancia habría entre los puntos azules? *b*) En realidad, ¿los puntos adyacentes en cada conjunto estarían suficientemente alejados para que usted pudiera medir fácilmente su distancia de separación con una cinta métrica? *c*) Suponga que repite el inciso *a*) en agua, donde el sonido viaja a 1480 m/s. ¿Qué tan alejados estarían los puntos en cada conjunto? ¿Podría medir fácilmente su separación con una cinta métrica?

15.3. ¡Tsunami! El 26 de diciembre de 2004 ocurrió un intenso terremoto en las costas de Sumatra, y desencadenó olas inmensas (un tsunami) que provocaron la muerte de 200,000 personas. Gracias a los satélites que observaron esas olas desde el espacio, se pudo establecer que había 800 km de la cresta de una ola a la siguiente, y que el periodo entre una y otra fue de 1.0 hora. ¿Cuál fue la rapidez de esas olas en m/s y en km/h? ¿Su respuesta le ayudaría a comprender por qué las olas causaron tal devastación?

15.4. Imágenes por ultrasonido. Se llama *ultrasonido* a las frecuencias más arriba de la gama que puede detectar el oído humano, esto es, aproximadamente mayores que 20,000 Hz. Se pueden usar ondas de ultrasonido para penetrar en el cuerpo y producir imágenes al reflejarse en las superficies. En una exploración típica con ultrasonido, las ondas viajan con una rapidez de 1500 m/s. Para obtener una imagen detallada, la longitud de onda no debería ser mayor que 1.0 mm. ¿Qué frecuencia se requiere entonces?

15.5. Luz visible. La luz es una onda, pero no una onda mecánica. Las cantidades que oscilan son campos eléctricos y magnéticos. La luz que es visible para los seres humanos tiene longitudes de onda de entre 400 nm (violeta) y 700 nm (rojo), en tanto que toda la luz viaja en el vacío a una rapidez $c = 3.00 \times 10^8$ m/s. *a*) ¿Cuáles son los límites de la frecuencia y el periodo de la luz visible? *b*) ¿Usando un cronómetro podría usted medir el tiempo que dura una sola vibración de luz?

Sección 15.3 Descripción matemática de una onda

15.6. La ecuación de cierta onda transversal es

$$y(x,t) = (6.50\text{ mm})\cos 2\pi\left(\frac{x}{28.0\text{ cm}} - \frac{t}{0.0360\text{ s}}\right)$$

Determine la *a*) amplitud, *b*) longitud de onda, *c*) frecuencia, *d*) rapidez de propagación y *e*) dirección de propagación de la onda.

15.7. Ciertas ondas transversales en una cuerda tienen rapidez de 8.00 m/s, amplitud de 0.0700 m y longitud de onda de 0.320 m. Las ondas viajan en la dirección $-x$, y en $t = 0$ el extremo $x = 0$ de la cuerda tiene su máximo desplazamiento hacia arriba. *a*) Calcule la frecuencia, el periodo y el número de onda de estas ondas. *b*) Escriba una función de onda que describa la onda. *c*) Calcule el desplazamiento transversal de una partícula en $x = 0.360$ m en el tiempo $t = 0.150$ s. *d*) ¿Cuánto tiempo debe pasar después de $t = 0.150$ s para que la partícula en $x = 0.360$ m vuelva a tener su desplazamiento máximo hacia arriba?

15.8. Una onda de agua que viaja en línea recta en un lago queda descrita por la ecuación

$$y(x,t) = (3.75\text{ cm})\cos(0.450\text{ cm}^{-1}x + 5.40\text{ s}^{-1}t)$$

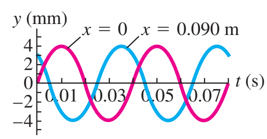
donde y es el desplazamiento perpendicular a la superficie tranquila del lago. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda un patrón de onda completo en pasar por un pescador en un bote anclado, y qué distancia horizontal viaja la cresta de la onda en ese tiempo? *b*) ¿Cuál es el número de onda y el número de ondas por segundo que pasan por el pescador? *c*) ¿Qué tan rápido pasa una cresta de onda por el pescador y cuál es la rapidez máxima de su flotador de corcho cuando la onda provoca que éste oscile verticalmente?

15.9. ¿Cuál de las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda, ecuación (15.12)? *a*) $y(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$; *b*) $y(x,t) = A\,\text{sen}(kx + \omega t)$; *c*) $y(x,t) = A(\cos kx + \cos\omega t)$. *d*) Para la onda del inciso *b*), escriba las ecuaciones para la velocidad y la aceleración transversales de una partícula en el punto x.

15.10. *a*) Para una onda en una cuerda descrita por $y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$, *a*) grafique y, v_y y a_y en función de x para $t = 0$. *b*) Considere los siguientes puntos de la cuerda: i) $x = 0$; ii) $x = \pi/4k$; iii) $x = \pi/2k$; iv) $x = 3\pi/4k$; v) $x = \pi/k$; vi) $x = 5\pi/4k$; vii) $x = 3\pi/2k$; viii) $x = 7\pi/4k$. Para una partícula en cada uno de estos puntos en $t = 0$, indique con palabras si la partícula se está moviendo y en qué dirección, y si se está acelerando, frenando o tiene aceleración instantánea cero.

15.11. Una onda senoidal se propaga por una cuerda estirada en el eje x. El desplazamiento de la cuerda en función del tiempo se grafica en la figura 15.30 para partículas en $x = 0$ y en $x = 0.0900$ m. *a*) Calcule la amplitud de la onda. *b*) Calcule el periodo de la onda. *c*) Se sabe que los puntos en $x = 0$ y $x = 0.0900$ m están separados una longitud de onda. Si la onda se mueve en la dirección $+x$, determine la longitud de onda y la rapidez de la onda. *d*) Si ahora la onda se mueve en la dirección $-x$, determine la longitud de onda y la rapidez de la onda. *e*) ¿Sería posible determinar de manera definitiva la longitud de onda en los incisos *c*) y *d*) si no supiéramos que los dos puntos están separados una longitud de onda? ¿Por qué?

Figura 15.30 Ejercicio 15.11.



15.12. Rapidez de propagación contra rapidez de partículas. *a*) Demuestre que la ecuación (15.3) puede escribirse como

$$y(x,t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

b) Use $y(x, t)$ para obtener una expresión para la velocidad transversal v_y de una partícula de la cuerda en la que viaja la onda. *c*) Calcule la rapidez máxima de una partícula de la cuerda. ¿En qué circunstancias es igual a la rapidez de propagación v? ¿Menor que v? ¿Y mayor que v?

15.13. Una onda transversal que viaja en una cuerda tiene amplitud de 0.300 cm, longitud de onda de 12.0 cm y rapidez de 6.00 cm/s y se representa con $y(x, t)$ del ejercicio 15.12. *a*) En el tiempo $t = 0$, calcule y

a intervalos de x de 1.5 cm (es decir, en $x = 0$, $x = 1.5$ cm, $x = 3.0$ cm, etcétera) de $x = 0$ a $x = 12.0$ cm. Muestre los resultados en una gráfica. Ésta es la forma de la cuerda en el tiempo $t = 0$. *b*) Repita los cálculos para los mismos valores de x en $t = 0.400$ s y $t = 0.800$ s. Muestre gráficamente la forma de la cuerda en esos instantes. ¿En qué dirección viaja la onda?

Sección 15.4 Rapidez de una onda transversal

15.14. ¿Con qué tensión debe estirarse una cuerda de 2.50 m de longitud y masa de 0.120 kg para que ondas transversales con frecuencia de 40.0 Hz tengan una longitud de onda de 0.750 m?

15.15. Un extremo de una cuerda horizontal se conecta a una punta de un diapasón eléctrico que vibra a 120 Hz. El otro extremo pasa por una polea y sostiene una masa de 1.50 kg. La densidad lineal de masa de la cuerda es de 0.0550 kg/m. *a*) ¿Qué rapidez tiene una onda transversal en la cuerda? *b*) ¿Qué longitud de onda tiene? *c*) ¿Cómo cambian las respuestas a los incisos *a*) y *b*), si la masa se aumenta a 3.00 kg?

15.16. Una cuerda de 1.50 m y que pesa 1.25 N está atada al techo por su extremo superior, mientras que el extremo inferior sostiene un peso W. Cuando usted da un leve pulso a la cuerda, las ondas que viajan hacia arriba de ésta obedecen la ecuación

$$y(x, t) = (8.50\text{ mm})\cos(172\text{ m}^{-1}\,x - 2730\text{ s}^{-1}\,t)$$

a) ¿Cuánto tiempo tarda un pulso en viajar a todo lo largo de la cuerda? *b*) ¿Cuál es el peso W? *c*) ¿Cuántas longitudes de onda hay en la cuerda en cualquier instante? *d*) ¿Cuál es la ecuación para las ondas que viajan *hacia abajo* de la cuerda?

15.17. Un alambre delgado de 75.0 cm tiene una masa de 16.5 g. Un extremo está amarrado a un clavo y el otro extremo está amarrado a un tornillo que puede ajustarse para variar la tensión en el alambre. *a*) ¿A qué tensión (en newtons) debe ajustarse el tornillo para que la onda transversal cuya longitud de onda es de 3.33 cm registre 875 vibraciones por segundo? *b*) ¿Con qué rapidez viajaría esta onda?

15.18. Cuerda pesada. Si en el ejemplo 15.3 (sección 15.4) *no* despreciamos el peso de la cuerda, ¿qué rapidez tiene la onda *a*) en la base de la cuerda? *b*) ¿En la parte media? *c*) ¿En la parte superior?

15.19. Un oscilador armónico simple en el punto $x = 0$ genera una onda en una cuerda. El oscilador opera con una frecuencia de 40.0 Hz y una amplitud de 3.00 cm. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de 50.0 g/m y se le estira con una tensión de 5.00 N. *a*) Determine la rapidez de la onda. *b*) Calcule la longitud de onda. *c*) Describa la función $y(x, t)$ de la onda. Suponga que el oscilador tiene su desplazamiento máximo hacia arriba en el instante $t = 0$. *d*) Calcule la aceleración transversal máxima de las partículas de la cuerda. *e*) Al tratar las ondas transversales en este capítulo, despreciamos la fuerza de la gravedad. ¿Esa aproximación es razonable en el caso de esta onda? Explique su respuesta.

Sección 15.5 Energía del movimiento ondulatorio

15.20. Un alambre de piano con masa de 3.00 g y longitud de 80.0 cm se estira con una tensión de 25.0 N. Una onda con frecuencia de 120.0 Hz y amplitud de 1.6 mm viaja por el alambre. *a*) Calcule la potencia media que transporta esta onda. *b*) ¿Qué sucede con la potencia media si la amplitud de la onda se reduce a la mitad?

15.21. Cuando despega un avión a propulsión, produce un sonido con intensidad de 10.0 W/m^2 a 30.0 m de distancia. Usted prefiere el tranquilo sonido de la conversación normal, que es de 1.0 μW/m^2. Suponga que el avión se comporta como una fuente puntual de sonido. *a*) ¿Cuál es la distancia mínima a la pista de aterrizaje a la que usted podría vivir para conservar su estado de paz mental? *b*) ¿Qué intensidad del sonido de los aviones experimenta un amigo suyo, quien vive a una distancia de la pista de aterrizaje que es el doble de la distancia a la que usted vive? *c*) ¿Qué potencia de sonido produce el avión en el despegue?

15.22. Umbral del dolor. Imagine que investiga un informe del aterrizaje de un OVNI en una región despoblada de Nuevo México, y encuentra un objeto extraño que radia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. Suponga que el sonido proviene de una fuente puntual y que puede despreciar las reflexiones. Está caminando lentamente hacia la fuente. Cuando está a 7.5 m de ella, determina que la intensidad es de 0.11 W/m^2. Comúnmente, se considera que una intensidad de 1.0 W/m^2 es el "umbral del dolor". ¿Cuánto más podrá acercarse a la fuente antes de que la intensidad del sonido alcance ese umbral?

15.23. Desarrollo de energía. Imagine que efectúa mediciones y determina que se están propagando ondas sonoras igualmente en todas direcciones desde una fuente puntual y que la intensidad es de 0.026 W/m^2 a una distancia de 4.3 m de la fuente. *a*) Calcule la intensidad a una distancia de 3.1 m de la fuente. *b*) ¿Cuánta energía sonora emite la fuente en una hora si su emisión se mantiene constante?

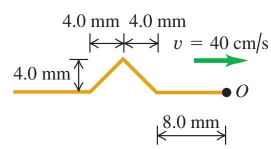
15.24. Imagine que un compañero con dotes matemáticas le dice que la función de onda de una onda viajera en una cuerda delgada es $y(x, t) = 2.30\text{ mm}\cos[(6.98\text{ rad/m})x + (742\text{ rad/s})t]$. Usted, que es una persona más práctica, efectúa mediciones y determina que la cuerda tiene una longitud de 1.35 m y una masa de 0.00338 kg. Ahora le piden determinar lo siguiente: *a*) amplitud; *b*) frecuencia; *c*) longitud de onda; *d*) rapidez de la onda; *e*) dirección en que viaja la onda; *f*) tensión en la cuerda; *g*) potencia media transmitida por la onda.

15.25. ¿Cuánta potencia total desarrolla la sirena del ejemplo 15.5?

Sección 15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición

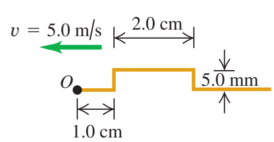
15.26. Reflexión. Un pulso de onda en una cuerda tiene las dimensiones que se muestran en la figura 15.31 en $t = 0$. La rapidez de la onda es de 40 cm/s. *a*) Si el punto O es un extremo fijo, dibuje la onda total en $t = 15$ ms, 20 ms, 25 ms, 30 ms, 35 ms, 40 ms y 45 ms. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que O es un extremo libre.

Figura **15.31** Ejercicio 15.26.



15.27. Reflexión. Un pulso ondulatorio en una cuerda tiene las dimensiones que se muestran en la figura 15.32 en $t = 0$. La rapidez de la onda es de 5.0 m/s. *a*) Si el punto O es un extremo fijo, dibuje la onda total a $t = 1.0$ ms, 2.0 ms, 3.0 ms, 4.0 ms, 5.0 ms, 6.0 ms y 7.0 ms. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que el punto O es un extremo libre.

Figura **15.32** Ejercicio 15.27.



15.28. Interferencia de pulsos triangulares. Dos pulsos ondulatorios triangulares viajan uno hacia el otro por una cuerda estirada, como se muestra en la figura 15.33. Los pulsos son idénticos y viajan a 2.00 cm/s. Los bordes delanteros de los pulsos están separados 1.00 cm en $t = 0$. Dibuje la forma de la cuerda en $t = 0.250$ s, $t = 0.500$ s, $t = 0.750$ s, $t = 1.000$ s y $t = 1.250$ s.

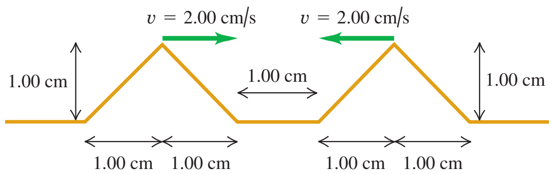


Figura **15.33** Ejercicio 15.28.

15.29. Suponga que el pulso que viaja hacia la izquierda en el ejercicio 15.28 está *debajo* del nivel de la cuerda sin estirar y no por encima. Trace los mismos dibujos que realizó para ese ejercicio.

15.30. Dos pulsos se desplazan en sentidos opuestos a 1.0 cm/s en una cuerda tensada, como se ilustra en la figura 15.34. Cada cuadro representa 1.0 cm. Dibuje la forma de la cuerda al final de *a*) 6.0 s, *b*) 7.0 s, *c*) 8.0 s.

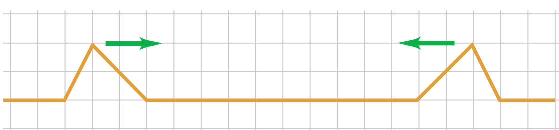


Figura **15.34** Ejercicio 15.30.

15.31. Interferencia de pulsos rectangulares. La figura 15.35 muestra dos pulsos ondulatorios rectangulares en una cuerda estirada, que viajan uno hacia el otro. Su rapidez es de 1.00 mm/s y su peso y su anchura se muestran en la figura. Los bordes delanteros de los pulsos están separadas 8.00 mm en $t = 0$. Dibuje la forma de la cuerda en $t = 4.00$ s, $t = 6.00$ s y $t = 10.0$ s.

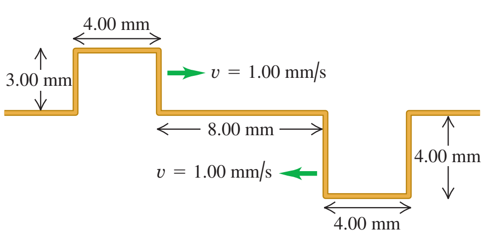


Figura **15.35** Ejercicio 15.31.

15.32. Dos ondas viajeras que se mueven por una cuerda son idénticas, excepto que sus velocidades son opuestas. Obedecen la ecuación $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx \pm \omega t)$, donde el signo más-menos del argumento depende de la dirección en que viaje la onda. *a*) Demuestre que la cuerda que vibra está descrita por la ecuación $y_{\text{net}}(x, t) = 2A\,\text{sen}\,kx\cos\omega t$. (*Sugerencia:* utilice las fórmulas trigonométricas para $\text{sen}(a \pm b)$.) *b*) Demuestre que la cuerda nunca se mueve en los lugares en que $x = n\lambda/2$, donde n es un entero no negativo.

Sección 15.7 Ondas estacionarias en una cuerda

15.33. Ciertas ondas estacionarias en un alambre se describen con la ecuación (15.28), si $A_{SW} = 2.50$ mm, $\omega = 942$ rad/s, y $k = 0.750\pi$ rad/m. El extremo izquierdo del alambre está en $x = 0$. ¿A qué distancias de ese extremo están *a*) los nodos y *b*) los antinodos de la onda estacionaria?

15.34. Los antinodos adyacentes de una onda estacionaria en una cuerda están separados 15.0 cm. Una partícula en un antinodo oscila en movimiento armónico simple con amplitud de 0.850 cm y periodo de 0.0750 s. La cuerda está en el eje $+x$, fija en $x = 0$. *a*) ¿Qué tan separados están los nodos adyacentes? *b*) ¿Cuáles son la longitud de onda, la amplitud, la rapidez de las dos ondas viajeras que forman este patrón? *c*) Calcule las rapideces transversales máxima y mínima de un punto en un antinodo. *d*) ¿Cuál es la distancia mínima en la cuerda entre un nodo a un antinodo?

15.35. Ecuación de onda y ondas estacionarias. *a*) Por sustitución directa demuestre que $y(x, t) = (A_{SW}\,\text{sen}\,kx)\,\text{sen}\,\omega t$ es una solución de la ecuación de onda [ecuación (15.12)] para $v = \omega/k$. *b*) Explique por qué la relación $v = \omega/k$ para ondas *viajeras* también es válida para ondas *estacionarias*.

15.36. Dé los detalles de la deducción de la ecuación (15.28) a partir de $y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$.

15.37. Sean $y_1(x, t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$ y $y_2(x, t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$ dos soluciones de la ecuación de onda (ecuación 15.12) para la misma v. Demuestre que $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ también es una solución de la ecuación de onda.

Sección 15.8 Modos normales de una cuerda

15.38. Una cuerda de 1.50 m de largo se estira entre dos soportes con una tensión que hace que la rapidez de las ondas transversales sea de 48.0 m/s. ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de *a*) la fundamental, *b*) el segundo sobretono y *c*) el cuarto armónico?

15.39. Un alambre con masa de 40.0 g está estirado de modo que sus extremos están fijos en puntos separados 80.0 cm. El alambre vibra en su modo fundamental con frecuencia de 60.0 Hz y amplitud en los antinodos de 0.300 cm. *a*) Calcule la rapidez de propagación de ondas transversales en el alambre. *b*) Calcule la tensión en el alambre. *c*) Determine la velocidad y aceleración transversales máximas de las partículas del alambre.

15.40. Un afinador de pianos estira un alambre de piano de acero con una tensión de 800 N. El alambre tiene 0.400 m de longitud y una masa de 3.00 g. *a*) Calcule la frecuencia de su modo fundamental de vibración. *b*) Determine el número del armónico más alto que podría escuchar una persona que capta frecuencias de hasta 10,000 Hz.

15.41. La forma de una cuerda delgada tensa que está atada por ambos extremos y oscila en su tercer armónico se describe con la ecuación $y(x, t) = (5.60\text{ cm})\,\text{sen}[(0.0340\text{ rad/cm})x]\,\text{sen}[(50.0\text{ rad/s})t]$, donde el origen está en el extremo izquierdo de la cuerda, el eje x está a lo largo de la cuerda y el eje y es perpendicular a la cuerda. *a*) Dibuje el patrón de onda estacionaria. *b*) Calcule la amplitud de las dos ondas viajeras que constituyen esta onda estacionaria. *c*) ¿Qué longitud tiene la cuerda? *d*) Calcule la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la rapidez de las ondas viajeras. *e*) Calcule la rapidez transversal máxima de la cuerda. *f*) ¿Qué ecuación $y(x, t)$ tendría esta cuerda si vibrara en su octavo armónico?

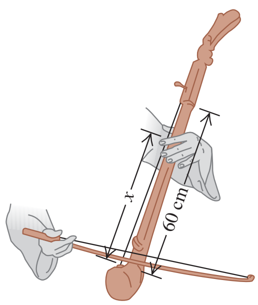
15.42. La función de onda de una onda estacionaria es $y(x, t) = 4.44\text{ mm}\,\text{sen}[(32.5\text{ rad/m})x]\,\text{sen}[(754\text{ rad/s})t]$. Para las dos ondas viajeras que forman esta onda estacionaria, determine *a*) la amplitud; *b*) la longitud de onda; *c*) la frecuencia; *d*) la rapidez; *e*) las funciones de onda. *f*) Con la información dada, ¿puede determinar de qué armónico se trata? Explique su respuesta.

15.43. Considere otra vez la cuerda y la onda viajera del ejercicio 15.24. Suponga que los extremos de la cuerda se mantienen fijos, y que tanto esta onda como la onda reflejada viajan por la cuerda en direcciones opuestas. *a*) Determine la función de onda $y(x, t)$ de la onda estacionaria que se produce. *b*) ¿En qué armónico está oscilando la onda estacionaria? *c*) Calcule la frecuencia de la oscilación fundamental.

15.44. Una cuerda de cierto instrumento musical mide 75.0 cm de longitud y tiene una masa de 8.75 g. Se toca en una habitación donde la rapidez del sonido es de 344 m/s. *a*) ¿A qué tensión debe ajustarse la cuerda de manera que, cuando vibre en su segundo sobretono, produzca un sonido cuya longitud de onda es de 3.35 cm? *b*) ¿Qué frecuencia de sonido produce la cuerda en su modo fundamental de vibración?

15.45. La porción de una cuerda de cierto instrumento musical que está entre el puente y el extremo superior del batidor (o sea, la porción que puede vibrar libremente) mide 60.0 cm y tiene una masa de 2.00 g. La cuerda produce una nota A_4 (440 Hz) al tocarse. *a*) ¿A qué distancia x del puente debe una ejecutante poner un dedo para tocar una nota D_5 (587 Hz)? (Vea la figura 15.36.) En ambos casos, la cuerda vibra en su modo fundamental. *b*) Sin reafinar, ¿es posible tocar una nota G_4 (392 Hz) en esta cuerda? ¿Por qué?

Figura 15.36 Ejercicio 15.45.



15.46. *a*) Una cuerda horizontal atada en ambos extremos vibra en su modo fundamental. Las ondas viajeras tienen rapidez v, frecuencia f, amplitud A y longitud de onda λ. Calcule la velocidad y la aceleración transversales máximas de puntos situados a i) $x = \lambda/2$, ii) $x = \lambda/4$ y iii) $x = \lambda/8$ del extremo izquierdo. *b*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿qué amplitud tiene el movimiento? *c*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿cuánto tarda la cuerda en ir desde su desplazamiento máximo hacia arriba, hasta su desplazamiento máximo hacia abajo?

15.47. Cuerda de guitarra. Una de las cuerdas de 63.5 cm de una guitarra ordinaria se afina para producir la nota B_3 (frecuencia de 245 Hz) vibrando en su modo fundamental. *a*) Calcule la rapidez de las ondas transversales en esta cuerda. *b*) Si la tensión de la cuerda se aumenta en 1.0%, ¿cuál será su nueva frecuencia fundamental? *c*) Si la rapidez del sonido en el aire circundante es de 344 m/s, ¿cuánto valdrán la frecuencia y la longitud de onda de la onda sonora producida en el aire por la vibración de esta cuerda? Compárelas con f y ω de la onda estacionaria en la cuerda.

15.48. Ondas en una vara. Una vara flexible de 2.0 m de longitud no está fija de ningún modo y está libre para vibrar. Elabore dibujos claros de esta vara cuando vibra en sus primeros tres armónicos, y luego utilice sus dibujos para determinar las longitudes de onda de cada uno de estos armónicos. (*Sugerencia:* pregúntese si los extremos deberían ser nodos o antinodos.)

Problemas

15.49. Una onda senoidal transversal con amplitud de 2.50 mm y longitud de onda de 1.80 m viaja de izquierda a derecha por una cuerda larga y estirada horizontal, con rapidez de 36.0 m/s. Tome como origen el extremo izquierdo de la cuerda no perturbada. En $t = 0$, el extremo izquierdo de la cuerda tiene su desplazamiento máximo hacia arriba. *a*) Calcule la frecuencia, frecuencia angular y el número de onda. *b*) ¿Qué función $y(x, t)$ describe la onda? *c*) Determine $y(t)$ para una partícula en el extremo izquierdo de la cuerda. *d*) Determine $y(t)$ para una partícula situada 1.35 m a la derecha del origen. *e*) Calcule la magnitud máxima de la velocidad transversal de cualquier partícula de la cuerda. *f*) Calcule el desplazamiento transversal y la velocidad transversal de una partícula que está 1.35 m a la derecha del origen en $t = 0.0625$ s.

15.50. La ecuación de una onda transversal que viaja por una cuerda es

$$y(x, t) = (0.750 \text{ cm}) \cos \pi [(0.400 \text{ cm}^{-1})x + (250 \text{ s}^{-1})t]$$

a) Calcule la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la rapidez de propagación. *b*) Dibuje la forma de la cuerda en los siguientes valores de t: 0, 0.0005 s y 0.0010 s. *e*) ¿La onda viaja en la dirección $+x$ o $-x$? *d*) La masa por unidad de longitud de la cuerda es de 0.0500 kg/m. Calcule la tensión. *e*) Calcule la potencia media de esta onda.

15.51. Tres trozos de cuerda, todos con longitud L, se atan extremo con extremo para formar una cuerda combinada de longitud $3L$. La masa por unidad de longitud de los tres trozos es, respectivamente, μ_1, $\mu_2 = 4\mu_1$ y $\mu_3 = \mu_1/4$. *a*) Si la cuerda combinada está sometido a una tensión F, ¿cuánto tiempo tarda una onda transversal en recorrer la longitud total $3L$? Dé su respuesta en términos de L, F y μ_1. *b*) ¿Su respuesta al inciso *a*) depende del orden en que se unieron los tres trozos? Explique su respuesta.

15.52. Una viga irregular de 1750 N cuelga horizontalmente del techo amarrada por sus extremos mediante dos alambres verticales (A y B), cada uno de los cuales mide 1.25 cm de longitud y pesa 2.50 N. El centro de gravedad de esta viga está a un tercio de la viga a partir del extremo donde el alambre A está amarrado. Si usted da un tirón a ambas cuerdas en la viga al mismo tiempo, ¿cuál es la diferencia entre las llegadas de los dos pulsos al techo? ¿Qué pulso llega primero?

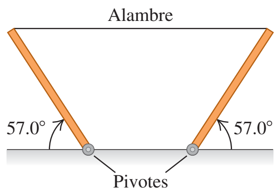
15.53. Juego de feria para hormigas. Imagine que tiene como mascota una hormiga llamada Chepina (masa m) y la coloca sobre una cuerda horizontal estirada, a la que se aferra. La cuerda tiene masa M y longitud L, y está sometida a una tensión F. Usted inicia una onda transversal senoidal con longitud de onda λ y amplitud A que se propaga por la cuerda, cuyo movimiento es en un plano vertical. La masa de Chepina es tan pequeña que no afecta la propagación de la onda. *a*) Calcule la rapidez máxima de Chepina al oscilar verticalmente. *b*) A Chepina le gusta el movimiento y quiere más. Usted decide aumentar al doble su rapidez máxima alterando la tensión, sin variar la longitud de onda ni la amplitud. ¿Deberá aumentar o disminuir la tensión, y en qué factor?

15.54. Hormiga en ingravidez. Una hormiga con masa m está parada tranquilamente sobre una cuerda horizontal, con masa por unidad de longitud μ, estirada mediante una tensión F. De repente, su primo Morton comienza a propagar por la cuerda una onda senoidal transversal con longitud de onda λ. El movimiento de la cuerda es en un plano vertical. ¿Qué amplitud mínima de la onda hará que la hormiga sienta momentáneamente que no pesa nada? Suponga que m es tan pequeña que la presencia de la hormiga no afecta la propagación de la onda.

15.55. Cuando hay una onda transversal senoidal en una cuerda, las partículas de la cuerda están en MAS. Éste es el mismo movimiento que el de una masa m unida a un resorte ideal con constante de fuerza k', cuya frecuencia angular de oscilación (como determinamos en el capítulo 13) es $\omega = \sqrt{k'/m}$. Considere una cuerda con tensión F y masa por unidad de longitud μ por la cual se propaga una onda senoidal con amplitud A y longitud de onda λ. *a*) Calcule la "constante de fuerza" k' de la fuerza de restitución que actúa sobre un segmento corto de la cuerda con longitud Δx (donde $\Delta x \ll \lambda$). *b*) Determine la dependencia de la "constante de fuerza" calculada en *a*) con respecto a F, μ, A y λ. Explique las razones físicas de tal dependencia.

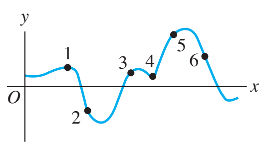
15.56. Un alambre de 5.00 m y 0.732 kg se utiliza para sostener dos postes uniformes de 235 N con igual longitud (figura 15.37). Suponga que, en esencia, el alambre es horizontal y que la rapidez del sonido es de 344 m/s. Está soplando un fuerte viento, lo que provoca que el alambre vibre en su séptimo sobretono. ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del sonido que produce el alambre?

Figura 15.37 Problema 15.56.



15.57. Onda no senoidal. En la figura 15.38, se muestra la forma de una onda en una cuerda en un instante específico. La onda se propaga a la derecha, en la dirección $+x$. *a*) Determine la dirección de la *velocidad* transversal de cada uno de los seis puntos numerados en la cuerda. Si la velocidad es cero, indíquelo. Explique su razonamiento. *b*) Determine la dirección de la *aceleración* transversal de cada uno de los seis puntos numerados en la cuerda. Explique su razonamiento. *c*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si la onda se propagara hacia la izquierda, en la dirección $-x$?

Figura 15.38 Problema 15.57.



15.58. Se produce una sucesión continua de pulsos ondulatorios senoidales en un extremo de una cuerda muy larga, y los pulsos viajan a lo largo de la cuerda. La onda tiene una frecuencia de 40.0 Hz, amplitud de 5.00 mm y longitud de onda de 0.600 m. *a*) ¿Cuánto tarda la onda en recorrer una distancia de 8.00 m a lo largo de la cuerda? *b*) ¿Cuánto tarda un punto de la cuerda en recorrer una distancia de 8.00 m, una vez que el tren de ondas ha llegado al punto y lo ha puesto en movimiento? *c*) En los incisos *a*) y *b*), ¿cómo cambia el tiempo si se duplica la amplitud?

15.59. Ondas bidimensionales. Una cuerda está estirada en el eje x. Se le desplaza en las direcciones y y z, de modo que el desplazamiento transversal de la cuerda está dado por

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad z(x, t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

a) Dibuje una gráfica de z contra y para una partícula de la cuerda que está en $x = 0$. La gráfica mostrará la trayectoria de la partícula vista por un observador que está en el eje $+x$ y mira hacia $x = 0$. Indique la posición de la partícula en $t = 0$, $t = \pi/2\omega$, $t = \pi/\omega$ y $t = 3\pi/2\omega$. *b*) Obtenga el vector de velocidad de una partícula que está en una posición *arbitraria* x en la cuerda. Demuestre que ese vector representa la velocidad tangencial de una partícula que se mueve en un círculo de radio A con velocidad angular ω, y demuestre que la rapidez de la partícula es constante (es decir, la partícula está en movimiento circular uniforme). (Véase el problema 3.75.) *c*) Obtenga el vector de aceleración de la partícula del inciso *b*). Demuestre que la aceleración siempre está dirigida hacia el centro del círculo y que su magnitud es $a = \omega^2 A$. Explique estos resultados en términos de un movimiento circular uniforme. Suponga ahora que el desplazamiento de la cuerda está dado por

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad z(x, t) = -A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Describa en qué diferiría el movimiento de una partícula en x del movimiento descrito en el inciso *a*).

15.60. Un alambre de cobre vertical, de 1.20 m de largo y de calibre 18 (diámetro de 1.024 mm) tiene atada en uno de sus extremos una esfera de 100.0 N. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda del tercer armónico para este alambre? *b*) Ahora una esfera de 500.0 N *sustituye* la esfera original. ¿Cuál es el cambio en la longitud de onda del tercer armónico provocado por la sustitución de la esfera ligera por la más pesada? (*Sugerencia:* véase la tabla 11.1 sobre el módulo de Young.)

15.61. Ondas de forma arbitraria. *a*) Explique por qué *cualquier* onda descrita por una función de la forma $y(x, t) = f(x - vt)$ se mueve en la dirección $+x$ con rapidez v. *b*) Demuestre que $y(x, t) = f(x - vt)$ satisface la ecuación de onda, sea cual fuere la forma funcional de f. Para hacerlo, escriba $y(x, t) = f(u)$, donde $u = x - vt$. Luego, para derivar parcialmente $y(x, t)$, use la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}(-v)$$
$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}$$

c) Una pulsación de onda está descrita por $y(x, t) = De^{-(Bx - Ct)^2}$, donde B, C y D son constantes positivas. Calcule la rapidez de esta onda.

15.62. La ecuación (15.7) para una onda senoidal puede hacerse más general incluyendo un ángulo de fase ϕ, donde $0 \le \phi \le 2\pi$ (en radianes), de modo que la función de onda $y(x, t)$ se convierte en

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

a) Dibuje la onda en función de x en $t = 0$ para $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/2$, $\phi = 3\pi/4$ y $\phi = 3\pi/2$. *b*) Calcule la velocidad transversal $v_y = \partial y/\partial t$. *c*) En $t = 0$, una partícula de la cuerda que está en $x = 0$ tiene un desplazamiento de $y = A/\sqrt{2}$. ¿Basta esta información para determinar el valor de ϕ? Si además sabemos que una partícula en $x = 0$ se mueve hacia $y = 0$ en $t = 0$, ¿qué valor tiene 0? *d*) Explique en una forma general qué debe saber acerca del comportamiento de la onda en un instante dado, para determinar el valor de ϕ.

15.63. *a*) Demuestre que la ecuación (15.25) también puede escribirse como $P_{\mathrm{med}} = \frac{1}{2}Fk\omega A^2$, donde k es el número de la onda. *b*) Si la tensión F en la cuerda se cuadruplica mientras la amplitud A se mantiene constante, ¿cómo deberán cambiar k y ω para mantener constante la potencia media? [*Sugerencia:* recuerde la ecuación (15.6).]

15.64. Energía en un pulso triangular. Un pulso ondulatorio triangular en una cuerda tensada viaja en la dirección $+x$ con rapidez v. La tensión en la cuerda es F y la densidad lineal de masa de la cuerda es μ. En $t = 0$, la forma del pulso está dada por

$$y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -L \\ h(L + x)/L & \text{para } -L < x < 0 \\ h(L - x)/L & \text{para } 0 < x < L \\ 0 & \text{para } x > L \end{cases}$$

a) Dibuje la pulsación en $t = 0$. *b*) Determine la función de onda $y(x, t)$ en todos los instantes t. *c*) Calcule la potencia instantánea de la onda. Demuestre que la potencia es cero excepto cuando $-L < (x - vt) < L$ y que es constante en este intervalo. Determine el valor de esta potencia constante.

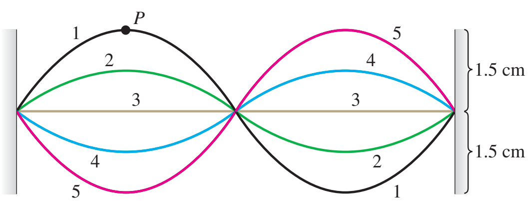
15.65. Una onda senoidal transversal viaja por una cuerda de longitud 8.00 m y masa 6.00 g. Su rapidez es de 30.0 m/s y su longitud de onda es de 0.200 m. *a*) ¿Qué amplitud debe tener la onda para que su potencia media sea de 50.0 W? *b*) En esta misma cuerda, si la amplitud y la longitud de onda son las del inciso *a*), ¿qué potencia media tendrá la onda si la tensión se aumenta de modo que la rapidez de la onda sea el doble?

15.66. Potencia instantánea en una onda. *a*) Dibuje una gráfica de $y(x, t)$ dada por la ecuación (15.7) como función de x para un instante dado t (digamos, $t = 0$). En los mismos ejes, grafique la potencia instantánea $P(x, t)$ dada por la ecuación (15.23). *b*) Explique la relación entre la pendiente de la curva de $y(x, t)$ contra x y el valor de $P(x, t)$. En particular, explique qué está sucediendo en los puntos donde $P = 0$, donde no hay transferencia instantánea de energía. *c*) La cantidad $P(x, t)$ siempre tiene el mismo signo. ¿Qué implica esto acerca de la dirección del flujo de energía? *d*) Considere una onda que avanza en la dirección $-x$, para la cual $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$. Calcule $P(x, t)$ para esta onda, y grafique $y(x, t)$ y $P(x, t)$ en función de x para un instante dado t (digamos, $t = 0$). ¿Qué diferencias surgen al invertir la dirección de la onda?

15.67. Un alambre metálico, con densidad ρ y módulo de Young Y, se estira entre soportes rígidos. A una temperatura T, la rapidez de una onda transversal es v_1. Si se aumenta la temperatura a $T + \Delta T$, la rapidez disminuye a $v_2 < v_1$. Determine el coeficiente de expansión lineal del alambre.

15.68. Una cuerda de 50.0 cm de longitud vibra sometida a una tensión de 1.00 N. La figura 15.39 muestra cinco imágenes estroboscópicas sucesivas de la cuerda. La lámpara produce 5000 destellos por minuto y las observaciones revelan que el desplazamiento máximo se dio en los destellos 1 y 5, sin otros máximos intermedios. *a*) Calcule la longitud de onda, el periodo y la frecuencia de las ondas que viajan por esta cuerda. *b*) ¿En qué modo normal (armónico) está vibra la cuerda? *c*) Calcule la rapidez de las ondas viajeras en la cuerda. *d*) ¿Con qué rapidez se está moviendo el punto P cuando la cuerda está en i) la posición 1 y ii) la posición 3? *e*) Calcule la masa de la cuerda (sección 15.3).

Figura 15.39 Problema 15.68.



15.69. Nodos de tendedero. El primo Morton está jugando otra vez con la cuerda del ejemplo 15.2 (sección 15.3). Un extremo está sujeto a un poste vertical. Morton sostiene con la mano el otro extremo y produce ondas relativamente lentas, de 0.720 m/s, en la cuerda. Él encuentra varias frecuencias con las que puede oscilar el extremo de la cuerda, de modo que una pinza ligera que está a 45.0 cm del poste no se mueva. Determine esas frecuencias.

15.70. Una cuerda de guitarra vibra en su modo fundamental, con nodos en sus extremos. La longitud del segmento de cuerda que vibra libremente es de 0.386 m. La aceleración transversal máxima de un punto en el punto medio del segmento es de 8.40×10^3 m/s^2, y la velocidad transversal máxima es de 3.80 m/s. *a*) Calcule la amplitud de esta onda estacionaria. *b*) ¿Qué rapidez tienen las ondas viajeras transversales en esta cuerda?

15.71. Como se muestra en el ejercicio 15.35, una onda estacionaria dada por la ecuación (15.28) satisface la ecuación de onda [ecuación (15.12)]. *a*) Demuestre que una onda estacionaria dada por la ecuación (15.28) también satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t)$$

Interprete esta ecuación en términos de lo que sabe acerca del movimiento armónico simple. *b*) ¿Una onda viajera dada por $y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$ también satisface la ecuación del inciso *a*)? Interprete este resultado.

15.72. *a*) Las ondas roja y azul de la figura 15.20 se combinan de modo que el desplazamiento de la cuerda en O siempre es cero. Con la finalidad de demostrarlo matemáticamente para una onda de forma arbitraria, considere una onda que se mueve a la derecha por la cuerda de la figura 15.20 (azul) y que, en el instante T, está dada por $y_1(x, T) = f(x)$, donde f es una función de x. (La forma de $f(x)$ determina la forma de la onda.) Si el punto O corresponde a $x = 0$, explique por qué, en el tiempo T, la onda que se mueve a la izquierda en la figura 15.20 (roja) está dada por la función $y_2(x, T) = -f(-x)$. *b*) Demuestre que la función de onda total $y(x, T) = y_1(x, T) + y_2(x, T)$ es cero en O, sin importar qué forma tenga $f(x)$. *c*) Las ondas roja y azul de la figura 15.21 se combinan de modo que la pendiente de la cuerda en O siempre sea cero. Para mostrar esto matemáticamente con una onda de forma arbitraria, supongamos otra vez que la onda que se mueve hacia la derecha en la figura 15.21 (azul) está dada por $y_1(x, T) = f(x)$ en el instante T. Explique por qué la onda que se mueve a la izquierda (roja) en ese mismo instante T está dada por la función $y_2(x, T) = f(-x)$. *d*) Demuestre que la función de onda total $y(x, T) = y_1(x, T) + y_2(x, T)$ tiene pendiente cero en O, sin importar qué forma tenga $f(x)$, en tanto $f(x)$ tenga una primera derivada finita.

15.73. Una cuerda que está en el eje $+x$ tiene un extremo libre en $x = 0$. *a*) Siguiendo pasos similares a los usados para deducir la ecuación (15.28), demuestre que una onda viajera incidente de la forma $y_1(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$ da lugar a una onda estacionaria $y(x, t) = 2A\cos\omega t\cos kx$. *b*) Demuestre que la onda estacionaria tiene un antinodo en su extremo libre ($x = 0$). *c*) Calcule el desplazamiento, la rapidez y la aceleración máximos del extremo libre de la cuerda.

15.74. Una cuerda con ambos extremos fijos está vibrando en su tercer armónico. Las ondas tienen una rapidez de 192 m/s y una frecuencia de 240 Hz. La amplitud de la onda estacionaria en un antinodo es de 0.400 cm. *a*) Calcule la amplitud del movimiento de puntos de la cuerda a una distancia de i) 40.0 cm; ii) 20.0 cm; y iii) 10.0 cm del extremo izquierdo de la cuerda. *b*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿cuánto tiempo tarda la cuerda en ir de su desplazamiento más grande hacia arriba, hasta su desplazamiento más grande hacia abajo? *c*) Calcule la velocidad y la aceleración transversales máximas de la cuerda en cada uno de los puntos del inciso *a*).

15.75. Un alambre de acero, uniforme y cilíndrico, de 55.0 cm de largo y 1.14 mm de diámetro, está fijo por ambos extremos. ¿A qué tensión debe ajustarse de manera que, cuando vibre en su primer sobretono, produzca la nota re sostenido cuya frecuencia es de 311 Hz? Suponga que el alambre se estira una cantidad insignificante. (*Sugerencia:* véase la tabla 14.1.)

15.76. Resistencia al esfuerzo. Un hilo o una cuerda se rompen si se somete a un esfuerzo de tensión excesivo [ecuación (11.8)]. Las cuerdas más gruesas pueden resistir una mayor tensión sin romperse porque, cuanto mayor sea el grosor, mayor será el área transversal y menor será el esfuerzo. Un tipo de acero tiene densidad de 7800 kg/m^3 y se rompe si el esfuerzo de tensión excede 7.0×10^8 N/m^2. Se quiere hacer una cuerda para guitarra con 4.0 g de este tipo de acero. En uso, la cuerda deberá resistir una tensión de 900 N sin romperse. *a*) Determine la longitud máxima y el radio mínimo que puede tener la cuerda. *b*) Calcule la frecuencia fundamental más alta posible de ondas estacionarias en esta cuerda, si puede vibrar en toda su longitud.

15.77. Ondas estacionarias combinadas. Una cuerda de guitarra de longitud L se puntea, de modo que la onda total producida es la suma de la fundamental y el segundo armónico. Es decir, la onda estacionaria está dada por:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

donde

$$y_1(x,t) = C\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t\,\mathrm{sen}\,k_1 x$$
$$y_2(x,t) = C\,\mathrm{sen}\,\omega_2 t\,\mathrm{sen}\,k_2 x$$

siendo $\omega_1 = vk_1$ y $\omega_2 = vk_2$. *a*) ¿En qué valores de x están los nodos de y_1? *b*) ¿Y los de y_2? *c*) Grafique la onda total en $t = 0$, $t = \frac{1}{8}f_1$, $t = \frac{1}{4}f_1$, $t = \frac{3}{8}f_1$ y $t = \frac{1}{2}f_1$. *d*) ¿La suma de las dos ondas estacionarias y_1 y y_2 produce una onda estacionaria? Explique.

15.78. Una pesada escultura de aluminio sólido se cuelga de un alambre de acero. La frecuencia fundamental para ondas estacionarias transversales en el alambre es de 250 Hz. Luego, la escultura (no el alambre) se sumerge totalmente en agua. *a*) Calcule la nueva frecuencia fundamental. *b*) ¿Por qué es una buena aproximación tratar el alambre como si estuviera fijo en ambos extremos?

15.79. Afinación de un violonchelo. Una violonchelista afina la cuerda C de su instrumento a una frecuencia fundamental de 65.4 Hz. La porción vibrante de la cuerda tiene una longitud de 0.600 m y una masa de 14.4 g. *a*) ¿Con qué tensión debe estirarse? *b*) ¿Qué porcentaje se debe aumentar la tensión para elevar la frecuencia de 65.4 Hz a 73.4 Hz, correspondiente a un aumento de tono de C a D?

Problemas de desafío

15.80. Ondas longitudinales en un resorte. Suele usarse un resorte largo blando (como Slinky™) para demostrar las ondas longitudinales. *a*) Demuestre que si un resorte que obedece la ley de Hooke tiene masa m, longitud L y constante de fuerza k', la rapidez de ondas longitudinales en él es $v = L\sqrt{k'/m}$. *b*) Evalúe v para un resorte con $m = 0.250$ kg, $L = 2.00$ m y $k' = 1.50$ N/m.

15.81. *a*) Demuestre que, para una onda en una cuerda, la energía cinética *por unidad de longitud de la cuerda* es

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2}\mu v_y^2(x,t) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

donde μ es la masa por unidad de longitud. *b*) Calcule $u_k(x, t)$ para una onda senoidal dada por la ecuación (15.7). *c*) También hay energía potencial elástica en la cuerda asociada al trabajo requerido para deformar y estirar la cuerda. Considere un segmento corto de la cuerda en la posición x cuya longitud no estirada es Δx, como en la figura 15.13. Si despreciamos la (pequeña) curvatura del segmento, su pendiente es $\partial y(x,t)/\partial x$. Suponga que el desplazamiento de la cuerda con respecto al equilibrio es pequeño, así que $\partial y/\partial x$ tiene magnitud mucho menor que 1. Demuestre que la longitud estirada del segmento es aproximadamente

$$\Delta x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]$$

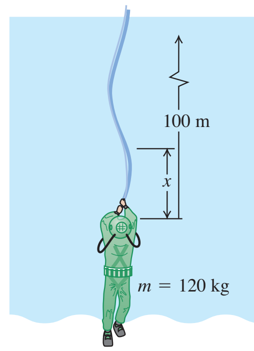
(*Sugerencia:* use la relación $\sqrt{1+u} \approx 1 + \frac{1}{2}u$, válida para $|u| \ll 1$.) *d*) La energía potencial almacenada en el segmento es igual al trabajo efectuado por la tensión de la cuerda F (que actúa a lo largo de la cuerda) para estirar el segmento de su longitud no estirada Δx a la longitud calculada en el inciso *c*). Calcule este trabajo, y demuestre que la energía potencial *por unidad de longitud de la cuerda* es

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2$$

e) Calcule $u_p(x, t)$ para una onda senoidal dada por la ecuación (15.7). *f*) Demuestre que $u_k(x, t) = u_p(x, t)$ para toda x y t. *g*) Grafique $y(x,t)$, $u_k(x,t)$ y $u_p(x,t)$ en función de x para $t = 0$; use los mismos ejes para las tres curvas. Explique por qué u_k y u_p son máximos donde y es cero, y viceversa. *h*) Demuestre que la potencia instantánea en la onda, dada por la ecuación (15.22), es igual a la energía total por unidad de longitud multiplicada por la rapidez de onda v. Explique por qué este resultado es lógico.

15.82. Un buzo está suspendido bajo la superficie de Loch Ness por un cable de 100 m conectado a una lancha en la superficie (figura 15.40). El buzo y su traje tienen una masa total de 120 kg y un volumen de 0.0800 m³. El cable tiene un diámetro de 2.00 cm y una densidad lineal de masa $\mu = 1.10$ kg/m. El buzo cree ver algo que se mueve en las profundidades y tira del extremo del cable horizontalmente para enviar ondas transversales por el cable, como señal para sus compañeros en la lancha. *a*) Calcule la tensión en el cable en el punto donde está conectado al buzo. No olvide incluir la fuerza de flotabilidad que el agua (densidad de 1000 kg/m³) ejerce sobre él. *b*) Calcule la tensión en el cable a una distancia x arriba del buzo, incluyendo en el cálculo la fuerza de flotabilidad sobre el cable. *c*) La rapidez de las ondas transversales en el cable está dada por $v = \sqrt{F/\mu}$ (ecuación 15.13). Por lo tanto, la rapidez varía a lo largo del cable, ya que la tensión no es constante. (Esta expresión no considera la fuerza de amortiguación que el agua ejerce sobre el cable en movimiento.) Integre para obtener el tiempo requerido para que la primera señal llegue a la superficie.

Figura 15.40 Problema de desafío 15.82.



15.83. Una cuerda uniforme con longitud L y masa m se sujeta por un extremo y se gira en un círculo horizontal con velocidad angular ω. Desprecie el efecto de la gravedad sobre la cuerda. Calcule el tiempo que una onda transversal tarda en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

15.84. Potencia instantánea en una onda estacionaria. Por la ecuación (15.21), la rapidez instantánea con que una onda transmite energía por una cuerda (potencia instantánea) es

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

donde F es la tensión. *a*) Evalúe $P(x, t)$ para una onda estacionaria de la forma dada por la ecuación (15.28). *b*) Demuestre que, para todos los valores de x la potencia *media* P_{med} transportada por la onda estacionaria es cero. [La ecuación (15.25) no es aplicable en este caso. ¿Sabe por qué?] *c*) Para una onda estacionaria dada por la ecuación (15.28), dibuje una gráfica que muestre $P(x, t)$ y el desplazamiento $y(x, t)$ en función de x para $t = 0$, $t = \pi/4\omega$, $t = \pi/2\omega$ y $t = 3\pi/4\omega$. [Una $P(x, t)$ positiva implica que la energía fluye en la dirección $+x$; un valor negativo de $P(x, t)$ implica que la energía fluye en la dirección $-x$.] *d*) La energía *cinética* por unidad de longitud de la cuerda es máxima donde la cuerda tiene la rapidez transversal más alta, y la energía *potencial* por unidad de longitud de la cuerda es máxima donde la cuerda tiene la pendiente más empinada (porque ahí es donde la cuerda está más estirada). (Véase el problema de desafío 15.81.) Usando estas ideas, analice el flujo de energía a lo largo de la cuerda.

15.85. Desafinación. La cuerda B de una guitarra está hecha de acero (densidad 7800 kg/m^3) y tiene 63.5 cm de longitud y 0.406 mm de diámetro. La frecuencia fundamental es $f = 247.0$ Hz. *a*) Calcule la tensión en la cuerda. *b*) Si la tensión F se modifica en una cantidad pequeña ΔF, la frecuencia f cambia una cantidad pequeña Δf. Demuestre que

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f}$$

c) La cuerda se afina como en el inciso *a*) cuando su temperatura es de 18.5 °C. Si la guitarra se pulsa vigorosamente, la temperatura en la cuerda subiría, con lo que cambiaría su frecuencia de vibración. Calcule Δf si la temperatura de la cuerda sube a 29.5 °C. La cuerda de acero tiene un módulo de Young de 2.00×10^{11} Pa y un coeficiente de expansión lineal de 1.20×10^{-5} (C°)$^{-1}$. Suponga que la temperatura del cuerpo de la guitarra se mantiene constante. ¿La frecuencia de vibración aumentará o disminuirá?