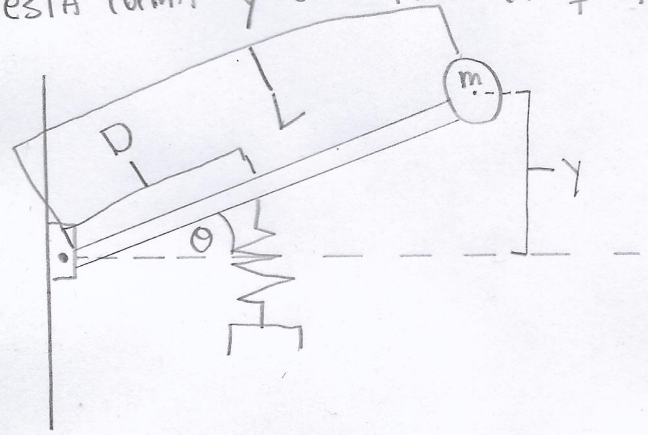
P4 a. Esta parte se puede hacer de varias maneras, lo importante es identificar las fuerzas ejercidas sobre la masa.

Todas las formas de hacer este problema derivan de la energía, usaremos esta forma y una mas (torque) como ejemplo.




Escribimos las energías presentes (como consideramos pequeñas oscilaciones descartamos movimiento y extensión del resorte en x):

$$U_r = \frac{k}{2}\left(D\operatorname{sen}(\theta) - l_0\right)^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{m\dot{y}^2}{2} + mgy + \frac{k}{2}\left(D\operatorname{sen}(\theta) - l_0\right)^2$$

$$U_g = mgy$$

Notar: Se considera el pivote como el origen. $l_0$ es la posición en la cual el resorte esta extendido en su largo natural, no el valor de este largo.

Buscamos obtener la ec. de movimiento de $y$, por lo tanto debemos encontrar una relación entre $\theta$ e $y$:

$$y = L\operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = y/L$$

$$\Rightarrow E = \frac{m\dot{y}^2}{2} + mgy + \frac{k}{2}\cdot\frac{D^2}{L^2}\left(y - \frac{L l_0}{D}\right)^2$$

Ahora que la energía esta expresada en función de y podemos describir las fuerzas ejercidas sobre la masa:

$$F_r^{[y]} = -\frac{dU_r}{dy} = -k\frac{D^2}{L^2}\left(y - \frac{Ll_0}{D}\right) \quad ; \quad F_g = -mg$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} = -k\frac{D^2}{L^2}\left(y - \frac{Ll_0}{D}\right) - mg$$

$$\Rightarrow y_{eq} = \frac{L}{D}l_0 - \frac{mg}{k}\cdot\frac{L^2}{D^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{kD^2}{mL^2}(y - y_{eq}) \quad ; \quad z = y - y_{eq}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{kD^2}{mL^2} z$$ ; Solo se pide la ec. de movimiento!

¿Como obtener $F_r^{[y]}$ usando torque?

El torque que ejerce el resorte sobre la barra debe ser el mismo que la barra ejerce sobre la masa. Esto proviene de que la energía asociada al movimiento la aporta el resorte $\Rightarrow$ el trabajo de ambas fuerzas debe ser igual:

$$W = \int_{l_1}^{l_2} \vec{F}_r \cdot d\vec{l} = \int_{l_1^y}^{l_2^y} F_r^{[y]}\, dl^{[y]} \rightarrow \begin{array}{l} d\vec{l} = d\vec{\theta} \times \vec{r} \\ d\vec{l}^{[y]} = d\vec{\theta} \times \vec{r}^{[y]} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_r \cdot d\vec{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_r^{[y]} \cdot d\vec{\theta} \Rightarrow \vec{\tau}_r = \vec{\tau}_r^{[y]}$$

Toda esta explicación no es necesaria, es solo para quien quiera conocer la explicación.

$$\Rightarrow D\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot k\left(D\,\text{sen}(\theta)-l_0\right) = L\cdot F_r^{[y]} \quad ; \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow F_r^{[y]} = \frac{kD}{L}\left(D\,\text{sen}(\theta)-l_0\right)\cdot \cancel{\cos(\theta)}^{\,1} \quad ; \quad \cos(\theta) \overset{\text{pequeñas osc.}}{\approx} 1$$

$$\Rightarrow F_r^{[y]} = \frac{kD}{L}\left(D\,\text{sen}(\theta)-l_0\right) \quad ; \quad L\,\text{sen}(\theta) = y \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{y}{L}$$

$$= \frac{kD}{L}\left(\frac{D}{L}y - l_0\right) = \frac{kD^2}{L^2}\left(y - \frac{L}{D}l_0\right)$$

Desde aquí se resuelve igual que de la forma anterior.

b. Para el ángulo se puede usar torque directamente:

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\cdot\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta} = mL^2\ddot{\theta}$$

$$mL^2\ddot{\theta} = -mg\cdot L\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - k\left(D\,\text{sen}(\theta)-l_0\right)\cdot D\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\rightarrow \text{sen}(\theta) \approx \theta \quad \wedge \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta) \approx 1$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} - \frac{kD}{mL^2}\left(D\theta - l_0\right)$$

$$\rightarrow \theta_{eq} = \frac{l_0}{D} - \frac{mgL}{kD^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{kD^2}{mL^2}\left(\theta - \theta_{eq}\right) \quad ; \quad \phi = \theta - \theta_{eq}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{kD^2}{mL^2}\phi$$

c. Se tienen 2 eq. de mov.:

$$\ddot{z} = \frac{kD^2}{mL^2} z \quad \wedge \quad \ddot{\phi} = \frac{kD^2}{mL^2} \phi$$

$$\Rightarrow \omega_z = \frac{D}{L} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \wedge \quad \omega_\phi = \frac{D}{L} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$ Son iguales! esto es necesario ya que $y = 2 sen(\theta) \simeq L\theta$

$\Rightarrow$ Deben oscilar con la misma frecuencia ya que la barra es rígida.

$$\Rightarrow \omega = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{o en } 1/s \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{D}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega \propto D$ es linealmente proporcional; la zona de mayor interés es $D = L$ donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$ el sistema es idéntico a una masa unida al resorte!