Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
FI1100 Introducción a la Física Moderna

Pauta Aux 2

Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Cristobal Moreno, Enrique Navarro, Matías Araya

9 de Septiembre 2020

1. P1

Para calcular la posición de equilibrio buscamos que la aceleración del corcho sea 0 y, por ende que la suma de fuerzas sea 0. Las fuerzas presentes son el peso mg y el empuje $\rho g V$.

$$m\ddot{y} = \rho g V - mg$$

$$\Leftrightarrow 0 = \rho g V - mg$$

Ahora escribimos el volumen tal que podamos encontrar la posición de equilibrio, $V = -\pi R^2 y$ (es importante notar el signo $-$ ya que el volumen debe ser un número positivo, en este caso y denota la poscición de la base del corcho, la cual como se sumerge es negativa!):

$$0 = -\rho g \pi R^2 y - mg$$

$$\Leftrightarrow \rho g \pi R^2 y = -mg$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{m}{\rho \pi R^2}$$

Llamos a esta posicion y_{eq}:

$$y_{eq} = -\frac{m}{\rho \pi R^2}$$

Ahora tenemos que el sistema es perturbado, por lo tanto la aceleración no será 0, calculamos entonces:

$$m\ddot{y} = -\rho g \pi R^2 y - mg$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{y} = -\rho g \pi R^2 (y - \frac{m}{\rho \pi R^2})$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{-\rho g \pi R^2}{m}(y - y_{eq})$$

Realizamos el cambio de variable $z = y - y_{eq}$ (notar que como y_{eq} es una constante esto implica que $\ddot{z} = \ddot{y}$)

$$\Leftrightarrow \ddot{z} = \frac{-\rho g \pi R^2}{m} z$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico, renombramos $w^2 = \frac{-\rho g \pi R^2}{m}$ tal que:

$$\ddot{z} = -w^2 z$$

La solución de esta ecuación es:

$$z(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt) \quad (1)$$

Donde A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales, para esto usaremos la primera derivada de z:

$$\dot{z}(t) = -wA\sin(wt) + wB\cos(wt) \quad (2)$$

Reemplazamos $z(t_0) = x_0 - y_{eq}$ en (1):

$$x_0 - y_{eq} = A\cos(wt_0) + B\sin(wt_0)$$

Ahora reemplazamos $\dot{z}(t_0) = v_0$ en (2):

$$v_0 = -wA\sin(wt_0) + wB\cos(wt_0)$$

Con esto tenemos 2 incógnitas y 2 ecuaciones, para simplificar el problema imponemos $t_0 = 0$, con lo cual se obtiene que:

$$A = x_0 - y_{eq}$$

$$B = \frac{v_0}{w}$$

2. P2

Analizamos la ecuación de movimiento en ambos ejes (x, y). Para poder representar el efecto que tiene la colina en y escribimos la fuerza elástica usada como $F_e = -k((y - y_0) - l_0)$, donde $y_0 = A(1 - \cos(\frac{\pi x}{l}))$. Recordar que esta fuerza elástica representa la interacción entre el auto y la colina, por lo tanto no es necesario describir la normal:

$$x: \quad m\ddot{x} = 0$$

$$y: \quad m\ddot{y} = -mg - k((y - y_0) - l_0)$$

Como sabemos que el auto se mueve de manera constane en x se tiene que:

$$x(t) = vt$$

Ahora desarrollamos y:

$$m\ddot{y} = -k(y + \frac{mg}{k} - l_0 - y_0)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{y} = -k(y + \frac{mg}{k} - l_0 - A - A\cos{(\frac{\pi vt}{l}))}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}(y + \frac{mg}{k} - l_0 - A) + \frac{k}{m}A\cos{(\frac{\pi vt}{l}))}$$

Ahora realizamos el cambio de variable $z = y + \frac{mg}{k} - l_0 - A$:

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}z + \frac{k}{m}A\cos{(\frac{\pi vt}{l}))}$$

Esto es un oscilador armónico forzado, donde la fuerza de forzamiento es $F_{forzamiento} = kA\cos{(\frac{\pi x}{l}))}$. Para resolver esto se utiliza el método de solución homogénea más solución particular, la solución homogénea es la solución del oscilador armónico sin forzamiento, mientras que la solución particular es una solución que coincide con la ecuación diferencial (ecuación de movimiento). Entonces se tiene que:

$$z(t) = z_H(t) + z_P(t)$$

$$z_H(t) = C_1\cos{(w_0t)} + C_2\sin{(w_0t)} \quad , \quad w_0 = \frac{k}{m}$$

$$z_P(t) = B\cos{(\frac{\pi vt}{l})}$$

Existen 3 incógnitas en este problema,C_1, C_2 y B, para resolver esto usamos las ecuaciones de $z(t)$, $\dot{z}(t)$ y $\ddot{z}(t)$:

$$z(t) = C_1\cos{(w_0t)} + C_2\sin{(w_0t)} + B\cos{(\frac{\pi vt}{l})}$$

$$\dot{z}(t) = -w_0C_1\sin{(w_0t)} + w_0C_2\cos{(w_0t)} - \frac{\pi v}{l}B\sin{(\frac{\pi vt}{l})}$$

$$\ddot{z}(t) = -w_0^2C_1\cos{(w_0t)} - w_0^2C_2\sin{(w_0t)} - (\frac{\pi v}{l})^2B\cos{(\frac{\pi vt}{l})}$$

Se tiene que la solución partiucular debe cumplir con la ecuación de movimiento:

$$\ddot{z_P} = -w_0z + w_0A\cos{(\frac{\pi vt}{l})}$$

$$\Leftrightarrow -(\frac{\pi v}{l})^2B\cos{(\frac{\pi vt}{l})} = -w_0^2B\cos{(\frac{\pi vt}{l})} + w_0A\cos{(\frac{\pi vt}{l})}$$

A partir de esto se puede calcular B, el resultado es:

$$B = \frac{w_0 l^2 A}{\pi^2 v^2 - w_0 l^2}$$

Ahora la resolución se reduce a un problema de condición inicial, como el auto empieza en equilibrio en el eje y (antes de subir por el cerrito) se tiene que debe iniciar en la posición de equilibrio $y_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$ (si tiene dudas de donde proviene esta expresión resuelva la ecuación de movimiento en y sin el término que ejerce el cerrito) y con una velocidad $\dot{y} = 0$, finalmente podemos fijar el tiempo t_0 donde mas nos convenga, en este caso $t_0 = 0$. De esta forma se tiene que:

$$z(0) = y(0) + \frac{mg}{k} - l_0 - A = -C_1 + B$$

$$\Leftrightarrow l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} - l_0 - A = -C_1 + C_2 + B$$

$$\Leftrightarrow C_1 = -A - B$$

Ahora para $\dot{y} = \dot{z}$:

$$\dot{z}(0) = 0 = w_0 C_2$$

$$\Leftrightarrow C_2 = 0$$

3. P3

La energía del sistema sin perturbar se puede escribir de la siguiente forma:

$$E = \frac{m}{2}(r\dot{\theta})^2 - \frac{mMG}{r}$$

Asumimos movimiento circular uniforme y escribimos la energía usando el momentum angular $L = m\dot{\theta}r^2$:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r}$$

Ahora aplicamos la perturbación, para esto primero realizamos el cambio de variable $r = R_0 + x$ donde R_0 corresponde al radio de la órbita circular y x corresponde a la pequeña perturbación en el radio, por esto se tiene que $R_0 \gg x$. Como consideramos que L se mantiene constante se tiene que $L = m\dot{\theta}R_0^2$.

Recordarles (o mostrarles) que como R_0 es constante $\Rightarrow \dot{r} = \dot{x}$

Procedemos a escribir la nueva energía del sistema, notar que surge un nuevo término el cual corresponde a la energía cinética asociada al movimiento radial:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{L^2}{2m(R_0 + x)^2} - \frac{mMG}{R_0 + x}$$

Nuestro objetivo es buscar la forma del oscilador armónico en función de x $\rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$, para ello buscamos reordenar los términos que corresponden a x:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{(R_0+x)^2}[\frac{L^2}{2m} - mMG(R_0+x)]$$

Ahora podemos realizar una expansión de Taylor en $\frac{1}{(R_0+x)^2}$:

$$\frac{1}{(R_0+x)^2} = \frac{1}{R_0^2} - \frac{2x}{R_0^3} + \frac{3x^2}{R_0^4} - \frac{4x3}{R_0^5} + \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(R_0+x)^2} = \frac{1}{R_0^2}(1 - \frac{2x}{R_0} + \frac{3x^2}{R_0^2} - \frac{4x3}{R_0^3} + \dots)$$

Como se tiene que $R_0 \gg x \Rightarrow \frac{x}{R_0} \ll 1$, podemos descartar los terminos de orden 2 y mayores para aproximar $\frac{1}{(R_0+x)^2}$:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(R_0+x)^2} \approx \frac{1}{R_0^2}(1 - \frac{2x}{R_0})$$

De esta manera la energía queda de la siguiente manera:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{R_0^2}(1 - \frac{2x}{R_0})[\frac{L^2}{2m} - mMG(R_0+x)]$$

Nos queda molestando el término con el momentum ángular L, para esto recordamos las propiedades del movimiento circular uniforme antes de la perturbación (como L se mantuvo constante no hay problema con usar el movimiento circular uniforme para definirlo):

$$ma_c = \frac{mMG}{R_0^2}, \quad a_c = R_0\dot{\theta}^2$$

$$\Leftrightarrow mR_0\dot{\theta}^2 = \frac{mMG}{R_0^2} / \cdot \frac{mR_0^3}{mR_0^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2R_0^4\dot{\theta}^2}{mR_0^3} = \frac{mMG}{R_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{mR_0^3} = \frac{mMG}{R_0^2}$$

$$\Leftrightarrow L^2 = m^2MGR_0$$

Reemplazando L en la energía se obtiene:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{R_0^2}(1 - \frac{2x}{R_0})[\frac{mMGR_0}{2} - mMG(R_0+x)]$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{R_0^2}(1 - \frac{2x}{R_0})[-\frac{mMGR_0}{2} - mMGx]$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{R_0^2}(1 - \frac{2x}{R_0})(-\frac{mMGR_0}{2})[1 + \frac{2x}{R_0}]$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + (-\frac{mMG}{2R_0})(1-\frac{2x}{R_0})[1+\frac{2x}{R_0}]$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + (-\frac{mMG}{2R_0})(1-\frac{4x^2}{R_0^2})$$

Finalmente reordenando obtenemos la energía de un oscilador armónico:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{4mMG}{R_0^3}x^2 - \frac{mMG}{2R_0}$$

Nombramos $k = \frac{4mMG}{R_0^3}$ tal que la energía total es:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{mMG}{2R_0}$$

A partir de esto podemos deducir que x se rige por la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Cuya solución general es:

$$x = A\sin(\sqrt{k}t + \phi_0)$$

Cosas que notar: La energía constante $-\frac{mMG}{2R_0}$ que queda es simplemente la energía asociada al movimiento circular inicial sin perturbación.

4. P4

Primero se pide calcular la posición de equilibrio, para esto igualamos la aceleración a 0 en la ecuación de movimiento para r (la distancia entre las partículas):

$$m\ddot{r} = F_r$$

$$\Leftrightarrow 0 = A(e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)})$$

$$\Leftrightarrow e^{-2b(r-R_0)} = e^{-b(r-R_0)} \quad / \cdot \ln()$$

$$\Leftrightarrow -2b(r-R_0) = -b(r-R_0)$$

$$\Leftrightarrow r = R_0$$

Ahora para encontrar la ecuación de movimiento consideramos la aproximación de pequeñas oscilaciones, osea, que r cambia muy poco cerca de la posición de equilibrio (esto es bastante válido ya que los átomos no deben separarse).
Para realizar esta aproximación se realiza una expansión de Taylor al rededor del punto de equilibrio (las comillas ' denotan la derivada con respecto a la posición r):

$$F_r(r) = F_r(R_0) + F_r'(R_0)(r - R_0) + \frac{1}{2}F_r''(R_0)(r - R_0)^2 + ...$$

Como la F_r esta compuesto por funciones exponenciales al derivarlas no cambiará su dependencia de r, por lo tanto la escala depende completamente del término $(r - R_0)^n$ y como dijimos, $r - R_0$ es muy pequeño, por lo tanto solo consideramos el término lineal de F_r:

$$F_r(r) \approx F_r(R_0) + F_r'(R_0)(r - R_0)$$

Basta ahora con encontrar la derivada de F_r, la cual es:

$$F_r'(r) = A(-2be^{-2b(r-R_0)} + be^{-b(r-R_0)})$$

$$\Rightarrow F_r'(R_0) = A(-2be^{-2b(R_0-R_0)} + be^{-b(R_0-R_0)})$$

$$\Leftrightarrow F_r'(R_0) = -Ab$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento obtenemos que:

$$m\ddot{r} = -Ab(r - R_0)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} = -\frac{Ab}{m}(r - R_0)$$

Nota: ¿Qué sucedió con el término $F_r(R_0)$?, la respuesta es que $F_r(R_0) = 0$, es fácil ver la razón de esto (calcúlelo).

Finalmente realizamos el cambio de variable $x = r - R_0$:

$$\ddot{r} = -\frac{Ab}{m}x$$

Hemos obtenida la ecuación de movimiento, la cual corresponde a un oscilador armónico con frecuencia $w = \sqrt{\frac{Ab}{m}}$