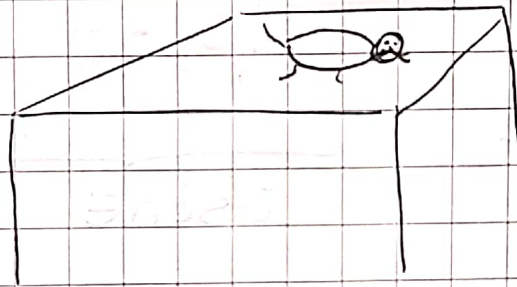
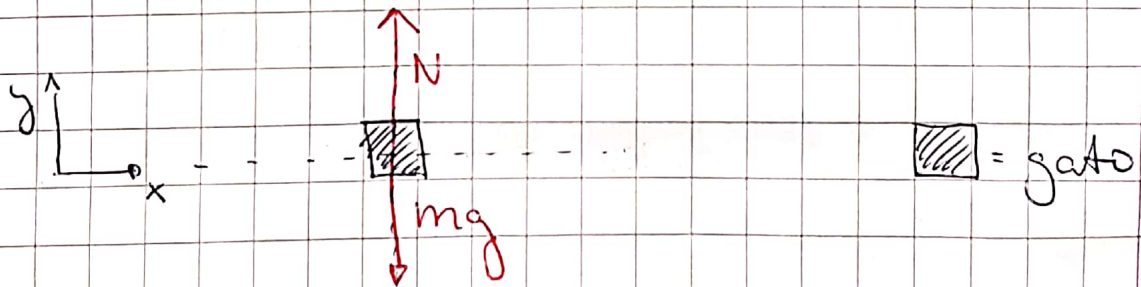


1.
1.1 Gato en reposo en la mesa



Primero obtenemos su DCL



Ahora aplicamos la 2^{da} ley de Newton para obtener las ecuaciones de movimiento.

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y$$

En el eje x no hay fuerzas en juego.

$$M a_x = 0 \rightarrow \boxed{a_x = 0}$$

En el eje y :

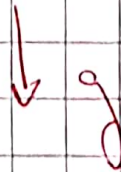
$$N - mg = m a_y$$

Pero el objeto está en reposo entonces $N = mg$

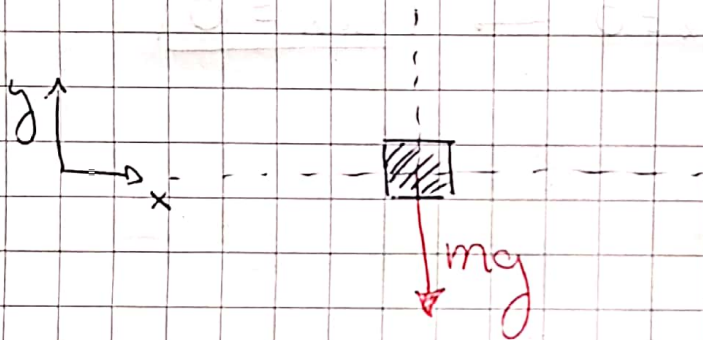
Quedando:

$$0 = m a_y \rightarrow \boxed{a_y = 0}$$

Un gato cayendo:



hacemos el dcl:



En x nuevamente no hay fuerzas $\rightarrow \boxed{a_x = 0}$

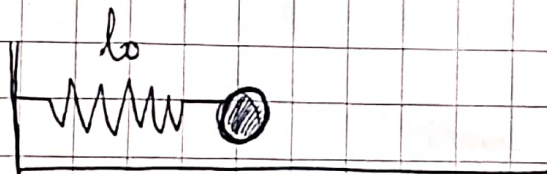
En y tenemos:

$$-mg = ma_y$$

$$\boxed{-g = a_y}$$

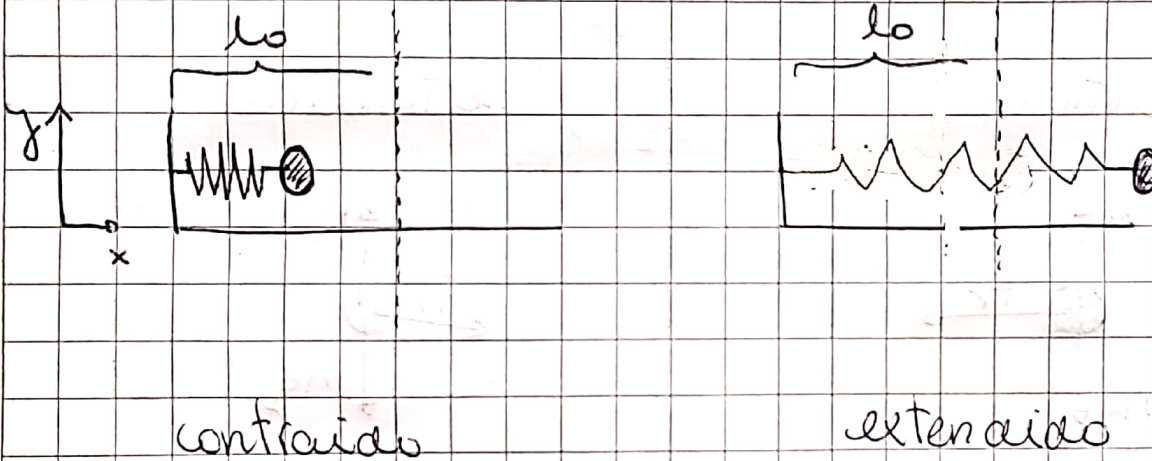
1.2

Un resorte:



FECHA: / /

Debemos analizarlo en 2 casos:



Recordemos que la fuerza del resorte sigue la ley de Hooke

$$F_r = -K \cdot \delta$$

δ = alargamiento

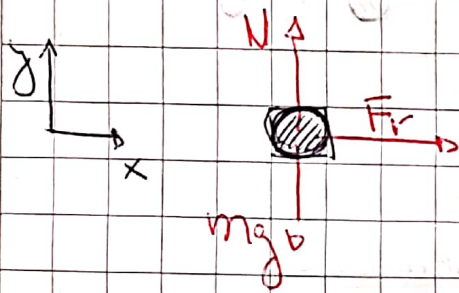
En este caso definimos el sistema de referencia donde está la pared, podemos decir que

$$\delta = x - l_0$$

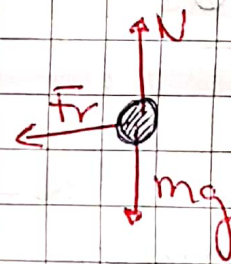
donde x es la posición de la esfera

DCL:

contraído



extendido



En el eje y en ambos casos sabemos que el resorte no se eleva

2^{da} ley de Newton
 $N - mg = may$

$$N = mg \rightarrow \boxed{a_y = 0}$$

Ahora en el eje x

Solo esta la fuerza del resorte

Y si se fijan de finimos $F_r = -K(x - l_0)$

l_0 cual será valido para ambos casos

(En el caso de estar contraído $x < l_0 \rightarrow F_r > 0$

(la punta a la derecha)

extendido $x > l_0 \rightarrow F_r < 0$

a punta a la izq.

FECHA: / /

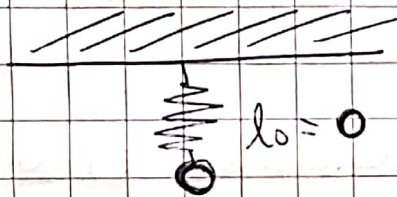
Aplicando Newton:

$$\sum F_x = m a_x$$

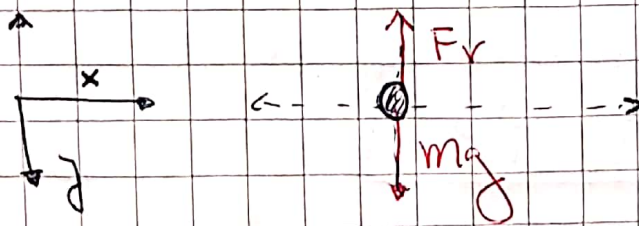
$$-K(x - l_0) = m a_x$$

$$\boxed{\frac{-K(x - l_0)}{m} = a_x}$$

1.3 Resorte en el techo con $l_0 = 0$



Hacemos el DCL



Definiendo y hacia abajo nos queda la 2^a ley de Newton:

$$\sum F_y = m a_y$$

FECHA: / /

$$mg - K(x - x_0) = may$$
$$mg - Kx = may$$

$$a_y = g - \frac{Kx}{m}$$

Algo interesante, es que al existir gravedad cambia el equilibrio del resorte.

Antes su equilibrio era $x=0$ o $x=x_0$
Donde ocurre que su aceleración es 0

Ahora cuando la aceleración es 0:

$$0 = g - \frac{Kx_{eq}}{m}$$

$$x_{eq} = \frac{mg}{K}$$

Derivadas:

2.3.1

b) Demostrar $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

Recordando:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$$

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} //$$

c) $\frac{\sec \alpha - 1}{\sec \alpha} = 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$

$$\frac{\sec \alpha - 1}{\sec \alpha} = 1 - \frac{1}{\sec \alpha}$$

$$= 1 - \cos \alpha$$

FECHA: / /

Usando la propiedad

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Usando :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \underbrace{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha) = 1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow 1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

usando esto se
le hace de una.

Volviendo a la ecuación:

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\alpha) &= 1 - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) // \end{aligned}$$

2.3.2

Derivar:

$$1) f(x) = x \sqrt{1+x^2}$$

$$f'(x) = x' \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot (\sqrt{1+x^2})' \quad \left(\begin{array}{l} \text{Regra del} \\ \text{producto} \end{array} \right)$$

$$= 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}_{\text{Regra de la cadena}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+x^2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

FECHA: / /

$$2) f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$$

$$f'(x) = \cos(\sin(\sin(x))) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

Aquí solo se aplica ley de la cadena:

$$(g(f(h(x))))' = g'(f(h(x))) \cdot f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$3) f(x) = \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2(x))$$

$$f'(x) = (\sin(\cos^2(x)))' \cdot \cos(\sin^2(x)) + \sin(\cos^2(x)) \cdot (\cos(\sin^2(x)))'$$

Para resolver esto notemos que cuando tenemos una función elevada a algo y se derivamos ocurre:

$$((f(x))^n)' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

Entiende de la regla de la cadena y de la
regla de las potencias

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Volvamos al problema:

$$f'(x) = (\sin(\cos^2(x)))' \cdot \cos(\sin^2(x)) + \sin(\cos^2(x)) \cdot (\cos(\sin^2(x)))'$$

$$\downarrow$$

$$\cos(\cos^2(x)) \cdot 2\cos(x) \cdot (-\sin(x))$$

$$- \sin(\sin^2(x)) \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

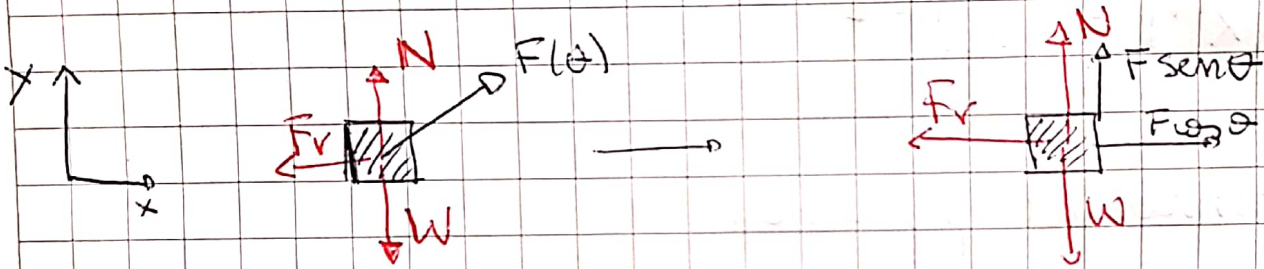
$$= -\cos(\cos^2(x)) \cdot 2\cos(x) \cdot \sin(x) \cdot \cos(\sin^2(x))$$

$$- \sin(\cos^2(x)) \cdot \sin(\sin^2(x)) \cdot 2\sin(x) \cos(x)$$

$$= -2\cos(x)\sin(x) \cdot (\cos(\cos^2(x)) \cdot \cos(\sin^2(x)) + \sin(\cos^2(x)) \cdot \sin(\sin^2(x)))$$

2.3.3

Hacemos el DCL del problema.



Usamos la 2^{da} ley de Newton

$$\sum F_x = \text{max} \quad , \quad \sum F_y = \text{may}$$

Vamos a asumir que queremos que se mueva con velocidad constante

$$\rightarrow \text{max} = 0 = \text{max}$$

$$\sum F_x = 0 = F \cos \theta - F_v \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = F \sin \theta + N - W \quad (2)$$

$$\text{de (2)} \rightarrow \boxed{N = W - F \sin \theta}$$

Recordando que $|F_r| = \mu \cdot |N|$

Reemplazamos en (1)

$$F \cos \theta - \mu (W - F \sin \theta) = 0$$

$$F = \frac{\mu W}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

Ahora para hallar $F_{\min}$, con μW constante

debemos encontrar el ángulo α que hace que $\cos \theta + \mu \sin \theta$ sea lo más grande posible.

Para buscar este α , derivamos e igualamos a 0

$$(\cos \theta + \mu \sin \theta)'_{\alpha} = 0$$

$$-\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = \mu \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \mu^2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \mu^2 \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \mu^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}\right)$$

↓
ángulo para $F_{\min}$.

Taylor

La serie de Taylor de una función se define como:

$$f(x) = \sum_n^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Donde x_0 es el punto en el que entorno a el se formará la serie.

Generalmente se elige tal que conozcamos cuanto vale $f(x_0)$.

Como nos piden entorno a $x_0 = 0$

La serie queda:

$$f(x) = \sum_n^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$$

$$= \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$a) \text{ Sen}(x) = \frac{\text{Sen}(0)}{0!} x^0 + \frac{\text{sen}'(0)}{1!} x + \dots + \frac{\text{sen}^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Obtenemos las derivadas del seno:

$$\text{Sen}(0) = 0$$

$$\text{Sen}'(x) = \cos(x) \rightarrow \text{sen}'(0) = \cos(0) = 1$$

$$\text{Sen}''(x) = (\text{sen}'(x))'$$

$$= (\cos(x))'$$

$$= -\text{sen}(x) \rightarrow \text{Sen}''(0) = -\text{sen}(0) = 0$$

$$\text{Sen}'''(x) = (\text{sen}''(x))'$$

$$= (-\text{sen}(x))'$$

$$= -\text{sen}'(x)$$

$$= -\cos(x) \rightarrow \text{Sen}'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$\text{Sen}^{(4)}(x) = (\text{sen}'''(x))'$$

$$= (-\cos(x))'$$

$$= \text{sen}(x) \rightarrow \text{Sen}^{(4)}(0) = \text{sen}(0) = 0$$

Las siguientes derivadas sus resultados, vuelven a repetirse

$$\text{sen}^{(5)}(x) = \text{sen}'(x)$$

$$\text{sen}^{(6)}(x) = \text{sen}''(x)$$

$$\vdots$$

Entonces la serie queda:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x) &= \frac{\text{sen}^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{\text{sen}^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{\text{sen}^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{\text{sen}^{(3)}(0)}{3!} x^3 \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

b)

$$\cos(x) = \frac{\cos(0)}{0!} x^0 + \frac{\cos'(0)}{1!} x^1 + \frac{\cos''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Nuevamente buscaremos las derivadas

$$\cos(0) = 1$$

$$\cos'(x) = -\sin(x) \rightarrow \cos'(0) = -\sin(0) = 0$$

$$\cos''(x) = (\cos'(x))'$$

$$= (-\sin(x))'$$

$$= -\cos(x) \rightarrow \cos''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$\cos'''(x) = (\cos''(x))'$$

$$= (-\cos(x))'$$

$$= \sin(x) \rightarrow \cos'''(0) = \sin(0) = 0$$

$$\cos^{(4)}(x) = (\cos'''(x))'$$

$$= (\sin(x))'$$

$$= \cos(x) \rightarrow \cos^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$$

Donde nuevamente como volvimos a $\cos(x)$, los siguientes son los mismos.

luego la serie queda:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{\cos(0)}{0!} x^0 + \frac{\cos'(0)}{1!} x^1 + \frac{\cos''(0)}{2!} x^2 + \frac{\cos'''(0)}{3!} x^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

c)

$$e^x = \frac{e^0}{0!} x^0 + \frac{e^{(0)'}}{1!} x^1 + \frac{e^{(0)''}}{2!} x^2 + \dots$$

Ahora sabemos que la exponencial tiene la propiedad de:

$$(e^{(x)'})' = e^x$$

$$(e^x)'' = e^x$$

Entonces la serie queda.

$$e^x = \frac{e^0}{0!} x^0 + \frac{e^0}{1!} x^1 + \frac{e^0}{2!} x^2 + \dots$$

FECHA: / /

Pero además $e^0 = 1$

$$\Rightarrow e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Demostrar $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Obtenemos la serie de Taylor de $e^{i\theta}$ en torno a $\theta_0 = 0$:

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i\cdot(0)}}{0!} \theta^0 + \frac{(e^{i\cdot(0)})'}{1!} \theta^1 + \frac{(e^{i\cdot(0)})''}{2!} \theta^2 + \frac{(e^{i\cdot(0)})'''}{3!} \theta^3 + \dots$$

Calculemos las derivadas que nos aparecen:

$$e^{i0} = e^0 = 1$$

$$(e^{i\theta})' = ie^{i\theta} \rightarrow (e^{i\cdot(0)})' = ie^{i\cdot 0} = i$$

$$(e^{i\theta})'' = (e^{i\theta})''$$

$$= (ie^{i\theta})'$$

$$= i^2 e^{i\theta} = -e^{i\theta} \rightarrow (e^{i\cdot(0)})'' = -e^{i\cdot 0} = -1$$

$$(e^{i\theta})''' = (-e^{i\theta})'$$

$$= -ie^{i\theta} \rightarrow (e^{i\cdot(0)})''' = -ie^{i\cdot(0)} = -i$$

Con $(e^{i\theta})^{(4)}$ pasará lo mismo que con el sen y
ellos en la parte anterior

$$(e^{i\theta})^{(4)} = (e^{i\theta})^{(0)}$$

$$(e^{i\theta})^{(5)} = (e^{i\theta})^{(1)}$$

$\vdots$

Luego nos queda la serie:

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i \cdot 0}}{0!} \overset{1}{\theta^0} + \frac{\overset{i}{e^{i \cdot 0}}}{1!} \theta + \frac{\overset{-1}{e^{i \cdot 0}}}{2!} \theta^2 + \frac{\overset{-i}{e^{i \cdot 0}}}{3!} \theta^3 + \frac{\overset{1}{e^{i \cdot 0}}}{4!} \theta^4 + \dots$$
$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \dots$$

Agrupamos los ~~en~~ pares e impares por separado

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \dots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots}_{\cos(\theta)} + i \underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)}_{\sin \theta}$$

$$\rightarrow e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta //$$