

FD704

MUESTREO Y ALIASING

Prof. Christian Ihle

FCFM Universidad de Chile



Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



1 Introducción

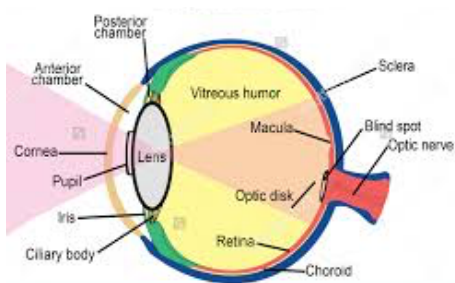
2 Teorema de muestreo de Nyquist

- Sistemas lineales
- Aliasing
- Antialiasing

Muestreo discreto

Algunos ejemplos

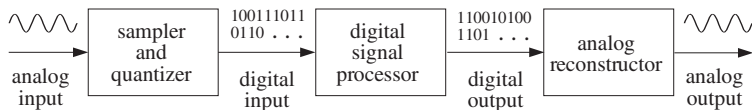
- Las imágenes de la retina son muestreadas en el espacio por fotorreceptores
- Las películas son muestreadas por cuadro (ej. PIV/PTV)
- El sonido es muestreado digitalmente (música de CDs, $f_{\text{samp}} = 44.1 \text{ kHz}$).



Procesamiento de señales analógicas

(Orfanidis, 1995)

- 1 La señal analógica es digitalizada, muestreada y cuantizada a un número finito de bits (conversión análogo-digital)
- 2 Las muestras digitalizadas son procesadas (*procesador digital de señales*)
- 3 El resultado puede ser re-convertido a señales analógicas.



(Transformada de Fourier)

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \text{ o bien, } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

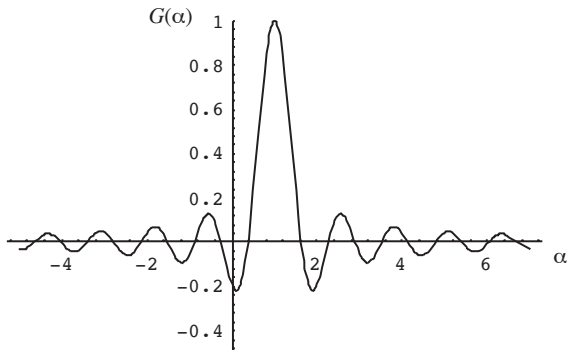
- $\mathcal{F}\{ah(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{h\} + b\mathcal{F}\{g\}$
- $\mathcal{F}\{h(at)\} = \frac{1}{a}H(\Omega/a) \quad (a < 1 \uparrow, a > 1 \downarrow)$
- $\mathcal{F}\{h(t-b)\} = e^{-i\Omega b} \mathcal{F}\{h(t)\}$ (cambio de fase)
- $\mathcal{F}\{t^n h(t)\} = i^n \frac{d^n}{d\Omega^n} H(\Omega)$
- $\mathcal{F}\{g(t) * h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau\} = G(\Omega)H(\Omega)$
- $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n h}{dt^n}\right\} = (i\Omega)^n H(\Omega)$

$$f(x) = \exp\left(i \frac{2\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\left(\alpha - \frac{2\pi x}{L}\right)\right] dx,$$

de donde,

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \lim_{X \rightarrow \infty} 2X \frac{\sin[(\alpha - \alpha_0)X]}{(\alpha - \alpha_0)X} \\ &= \lim_{X \rightarrow \infty} 2X G(\alpha - \alpha_0, X) \\ &= 2\pi \delta(\alpha - \alpha_0) \end{aligned}$$



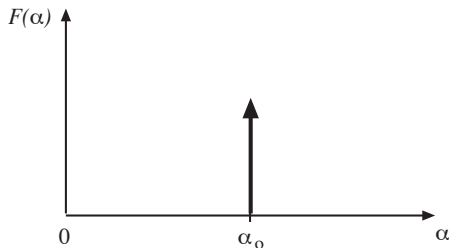
Función Dirac- δ

$$\delta(\alpha) \begin{cases} \rightarrow \infty & \alpha = 0 \\ = 0 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\alpha x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha') d\alpha' = 1$$

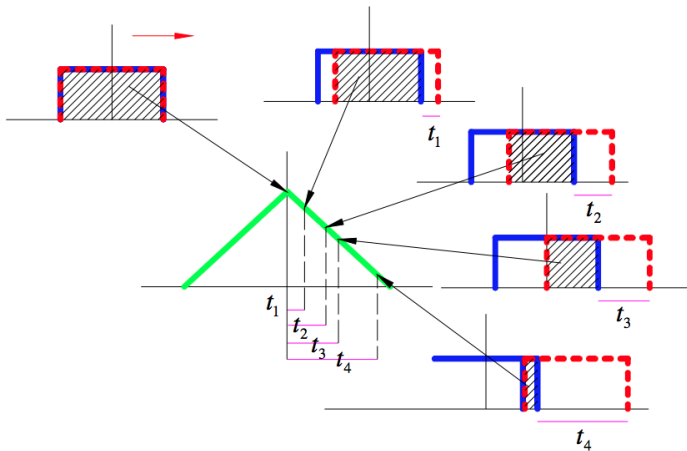
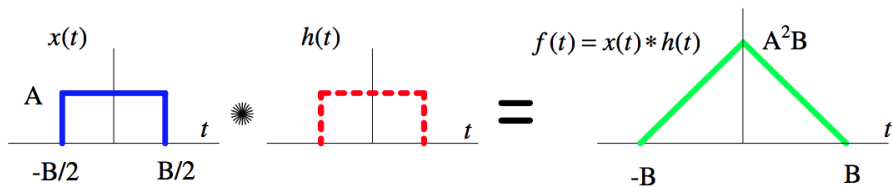
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha') \delta(\alpha' - \alpha_0) d\alpha' = g(\alpha_0)$$

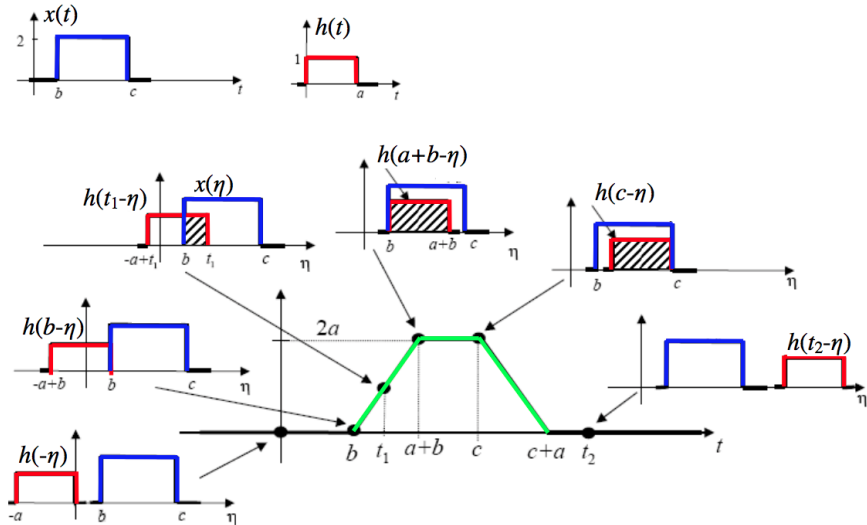


Función de respuesta impulsiva (h)

$$y = h * x. \quad (3)$$

- Condiciona el comportamiento del sistema.
- En el espacio de frecuencia permite aplicar filtros a los datos.





Respuesta estacionaria sinusoidal del filtro

Filtros lineales

Supongamos:

$$x(t) = e^{i\Omega t} \quad (4)$$

$$y = h * x \quad (5)$$

entonces:

$$y(t) = H(\Omega)e^{i\Omega t} \quad (\text{el sistema es lineal}) \quad (6)$$

Sistemas lineales

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{\mathbf{S}[\quad]} \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow \boxed{\mathbf{S}[\quad]} \longrightarrow y_2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow \boxed{\mathbf{S}[\quad]} \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

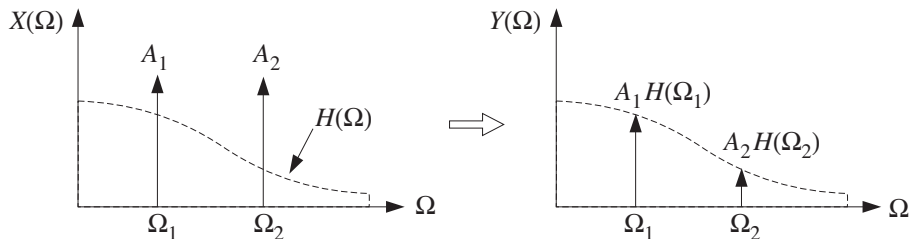
Luego, podemos definir,

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\Omega_k t}, \quad (7)$$

de donde,

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_k H(\Omega_k) e^{i\Omega_k t}. \quad (8)$$

Podemos *diseñar* un filtro para seleccionar (o eliminar) las frecuencias requeridas.



Filtros lineales

Tomando la transformada de Fourier a la función de entrada:

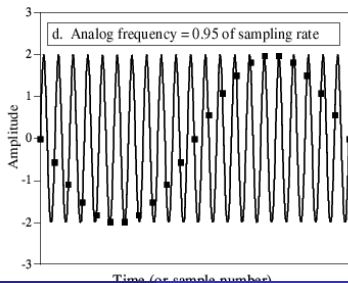
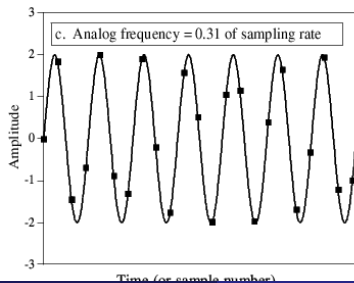
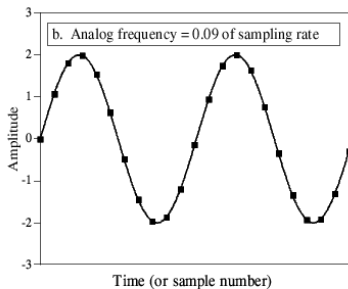
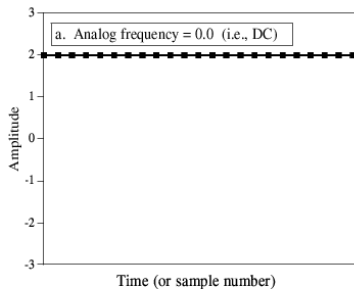
$$X(\Omega) = 2\pi \sum_k A_k \delta(\Omega - \Omega_k), \quad (9)$$

de donde,

$$Y(\Omega) = 2\pi \sum_k A_k H(\Omega_k) \delta(\Omega - \Omega_k), \quad (10)$$

Ejemplo: podemos definir n tal que $H(\Omega_{k \geq n}) = 0$ (filtro pasa bajo hasta la frecuencia Ω_{n-1}).

Aliasing



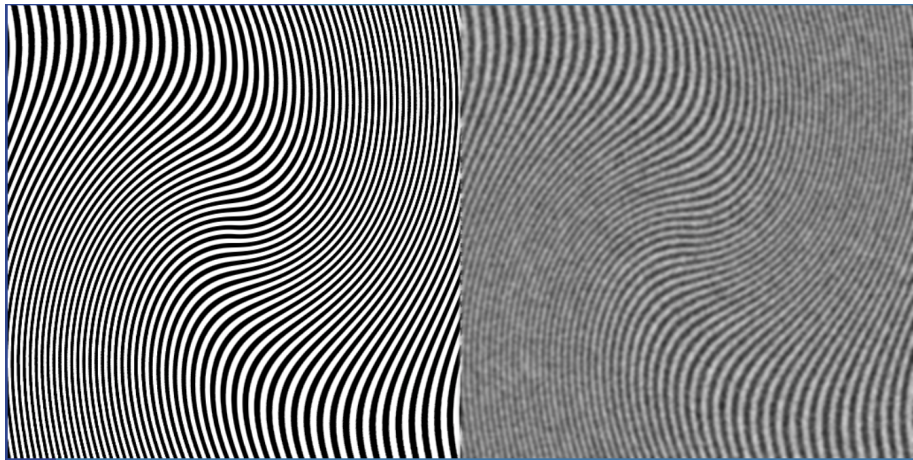
Moiré

Patrones superpuestos



Moiré

Patrones superpuestos



Nyquist

La frecuencia de muestreo debe ser al menos dos veces la máxima frecuencia contenida en la señal.

$$f_{\text{samp}} \geq 2 f_{\text{sig}}, \quad (11)$$

donde f_{samp} es la frecuencia de muestreo y f_{sig} es la frecuencia de la señal. Desde el punto de vista de la máxima frecuencia medible (f_{max}) dada una frecuencia de muestreo,

$$f_{\text{max}} \in \left[-\frac{f_{\text{samp}}}{2}, \frac{f_{\text{samp}}}{2} \right] \quad (12)$$

Frecuencia percibida

Folding

Cuando no se respeta el criterio de Nyquist, se perciben frecuencias inferiores a la frecuencia de entrada. Este fenómeno (*folding*) se puede resumir de la siguiente forma:

$$f_{\text{percibida}} = |f_{\text{sig}} - N_I f_{\text{samp}}|, \quad (13)$$

con N_I es el entero más cercano a $f_{\text{sig}}/f_{\text{samp}}$.

Filtros antialiasing

- La mayoría de las señales no tienen un ancho de banda limitado
- Para muestrear a una determinada tasa, se debe aplicar un filtro pasa bajo a la frecuencia de experimento requerida ($\leq f_{\text{samp}}/2$).

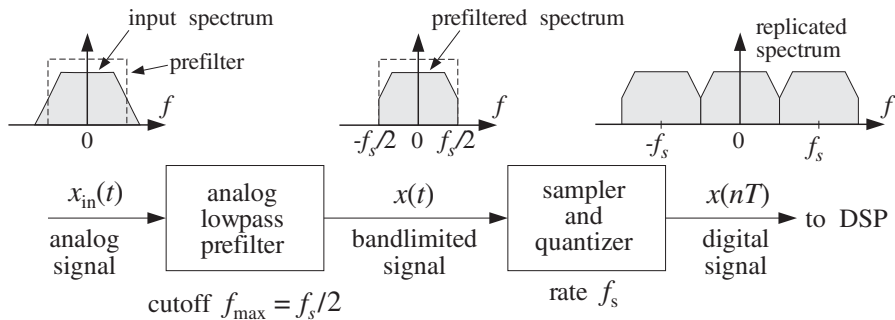


Fig. 1.3.5 Antialiasing prefilter.

Ventanas

Fugas en señales

- El uso de FT requiere funciones periódicas
- Cuando la función no es periódica aparecen efectos de borde debido a las ventanas
- Las funciones ventana ayudan a corregir este problema.

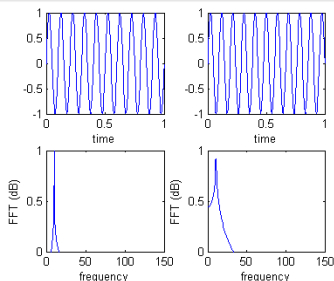


Figure 3. Comparison of periodic sine wave (left) and FFT to non periodic (right) with leakage in the FFT.

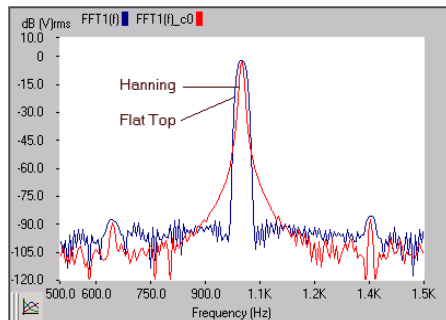


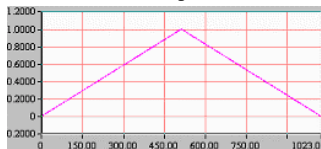
Figure 7. Comparison of Hanning and Flat Top windowing functions with a non-periodic sine wave.

Imágenes de www.lds-group.com

Funciones ventana

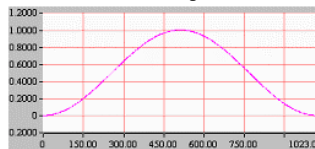
Bartlett

Highest Side lobe: -26dB



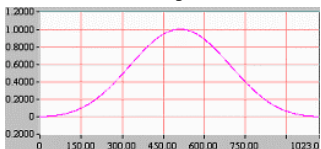
Hanning

Highest side lobe: -32 dB



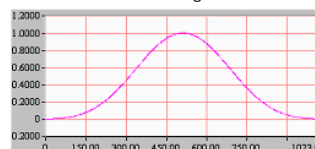
Blackman

Highest side lobe: -74 dB



Kaiser-Bessel

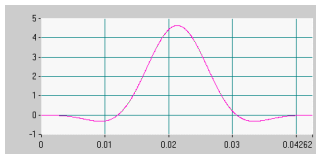
Highest side lobe: -70 dB



Funciones ventana

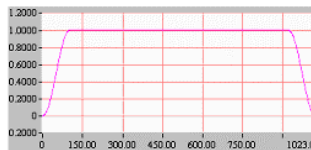
Flat Top

Highest side lobe: -93dB



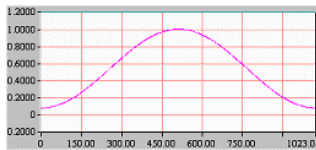
Tukey

Highest side lobe: -13 dB

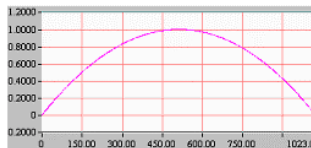


Hamming

Highest side lobe: -42dB



Welch-Highest side lobe: -21dB



Window	Best for these Signal Types	Frequency Resolution	Spectral Leakage	Amplitude Accuracy
Barlett	Random	Good	Fair	Fair
Blackman	Random or mixed	Poor	Best	Good
Flat top	Sinusoids	Poor	Good	Best
Hanning	Random	Good	Good	Fair
Hamming	Random	Good	Fair	Fair
Kaiser-Bessel	Random	Fair	Good	Good
None (boxcar)	Transient & Synchronous Sampling	Best	Poor	Poor
Tukey	Random	Good	Poor	Poor
Welch	Random	Good	Good	Fair

Bibliografía

ORFANIDIS, SOPHOCLES J 1995 *Introduction to signal processing*. Prentice-Hall, Inc.