Control Predictivo
Unidad 3: Control Predictivo Robusto

Diego Muñoz Carpintero

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

11 Noviembre 2020

Temas de Hoy

- Control Predictivo Robusto
  - Introducción a MPC con manejo explícito de incertezas*
  - Diferencias entre el caso determinístico y el incierto: Programación dinámica y políticas de control**
  - Una primera formulación de MPC robusto*

* Libro de Rawlings y Mayne, Cap. 3., Libro de Kouvaritakis, Cap. 3, Libro de Rossiter Cap. 11 (ninguno está como precisamente se muestra aquí)
** Libro de Rawlings y Mayne, Cap. 3.1

MPC con manejo explícito de incertezas

Control Predictivo (MPC) Robusto y Estocástico con dos familias de estrategias de MPC que lidian explícitamente con incertezas en el sistema. Usualmente nos referimos a variables que son inciertas al momento de realizar las predicciones o al medir.

Consideraremos 2 tipos de incerteza:

1. Incerteza aditiva:

$$x_{k+1} = f(x, u) + Dw$$

donde D es una matriz de dimensión adecuada y w es incierto. Entre otras, esta incerteza puede modelar:

- Imperfecciones del modelo, dinámicas no modeladas o perturbaciones:
$$x_{k+1} = Ax + Bu + Dw.$$
- Fuentes externas inciertas. Ejemplo: un sistema térmico donde las predicciones de temperatura externa T_a pueden tener errores

$$C\dot{T} = \frac{T_a - T}{R_a} + P_{in} \rightarrow T_{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{CR_a}\right) T_k + \frac{\Delta t}{C} P_{in,k} + \frac{\Delta t}{CR_a} T_{a,k}$$

Introducción a MPC con manejo explícito de incertezas

- Error de estimación del estado: $x = \hat{x} + e$. Luego

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \Rightarrow x_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + w_k$$

donde $w = Ae$.

2. Incerteza multiplicativa: es incerteza en variables que multiplican al estado. Usualmente son parámetros (incerteza paramétrica)

Ejemplo, en el caso del calentador, la resistencia R_a puede variar dependiendo de otras variables (con una dinámica o función no incorporada en el modelo)

$$T_{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{CR_a}\right) T_k + \frac{\Delta t}{C} P_{in,k} + \frac{\Delta t}{CR_a} T_{a,k}$$

Introducción a MPC con manejo explícito de incertezas

Si bien el MPC determinístico es una estrategia de control en lazo cerrado, y como tal otorga cierta robustez frente a la presencia de incertezas o perturbaciones. Sin embargo, cuando el efecto es muy grande, se podría perder factibilidad a restricciones y/o estabilidad. Luego, es necesario lidiar con estas perturbaciones y/o incertezas de forma explícita. Ese es el rol del MPC Robusto y Estocástico.

- MPC Robusto: trabaja con ideas de peor caso. Busca satisfacer restricciones y/o alcanzar desempeños optimizados para la peor realización posible de las variables inciertas.
- MPC estocástico: trabaja con distribuciones. Busca satisfacer restricciones con una cierta probabilidad y/o alcanzar desempeños optimizados para algún estadístico de las perturbaciones.

A continuación veremos la mayor diferencia conceptual entre un problema de control óptimo en lazo abierto y un control óptimo en lazo cerrado, y como se relaciona esto con el manejo de incerteza.

Diferencias entre MPC determinístico e incierto

Para esto consideremos el sistema dinámico

$$x_{k+1} = x_k + u_k$$

y resolvemos el problema de control óptimo que busca minimizar el funcional:

$$V(x_0, \vec{u}) = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2} x_k^2 + u_k^2$$

Se resuelve con optimización directa (es una optimización en lazo abierto) y programación dinámica (nos da una secuencia de acciones de control que son funciones del estado: lazo cerrado).

Diferencias entre MPC determinístico e incierto

Con optimización directa

$$V(x_0,\vec{U}) = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2} x_k^2 + U_k^2 .$$

$$x_1 = x_0 + U_0$$

$$x_2 = x_1 + U_1 = x_0 + U_0 + U_1 \Rightarrow V(x_0,\vec{U}) = \frac{1}{2}(x_0 + U_0 + U_1 + U_2)^2$$

$$x_3 = x_2 + U_2 = x_0 + U_0 + U_1 + U_2 \qquad + \frac{1}{2}\Big(x_0^2 + U_0^2 + (x_0+U_0)^2 + U_1^2$$

$$+ (x_0 + U_0 + U_1)^2 + U_2^2\Big)$$

$$\Rightarrow V(x_0,\vec{U}) = 2x_0^2 + x_0\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_0\\U_1\\U_2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}U_0 & U_1 & U_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_0\\U_1\\U_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{U}^* = -\begin{bmatrix}0.613\\0.231\\0.077\end{bmatrix}x_0}$$

Diferencias entre MPC determinístico e incierto

Con programación dinámica

- $V^*_{3,3}(x_3) = \frac{1}{2} x_3^2$,

$$V^*_{2,3}(x_2) = \min_{u_2} \frac{1}{2}\left(x_2^2 + u_2^2\right) + V^*_{3,3}(x_3) = \min_{u_2} \frac{1}{2}\left(x_2^2 + u_2^2 + (x_2+u_2)^2\right)$$

$$= \min_{u_2} x_2^2 + u_2^2 + x_2 u_2 \Rightarrow 2u_2 + x_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -\frac{x_2}{2}$$

$$\Rightarrow V^*_{2,3}(x_2) = \frac{1}{2}\left(x_2^2 + \left(\frac{-x_2}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{x_2}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} x_2^2$$

- $V^*_{1,3}(x_1) = \min_{u_1} \frac{1}{2}\left(x_1^2 + u_1^2\right) + \frac{3}{4}(x_1 + u_1)^2$

$\vdots$

$$u_1 = -\frac{3}{5} x_1, \quad u_0 = -\frac{8}{13} x_0.$$

Pero

$x_1 = x_0 + u_0$

$x_2 = x_0 + u_0 + u_1$

$$\Rightarrow U = -\begin{bmatrix} 8/13 \\ 3/13 \\ 1/13 \end{bmatrix} x_0 = -\begin{bmatrix} 0.613 \\ 0.231 \\ 0.077 \end{bmatrix} x_0$$

Diferencias entre MPC determinístico e incierto

Se verifica que ambos métodos dan lo mismo cuando no hay incertezas.

Ahora consideramos la presencia de incertezas:

$$x_{k+1} = x_k + u_k + w_k$$

con $w_k \in [-1, 1]$. La misma función de costos ahora depende de $\mathbf{w}$:

$$V(x_0, \vec{u}, \vec{w}) = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2} x_k^2 + u_k^2$$

Pero queremos optimizar en función de argumentos conocidos, así que optimizamos el costo

$$V(x_0, \vec{u}, \vec{0}) = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2} x_k^2 + u_k^2$$

Es evidente que las soluciones son las mismas que en el caso determinístico.

Pero las acciones de control cambian con programación dinámica.

Diferencias entre MPC determinístico e incierto

Es evidente que las soluciones son las mismas que en el caso determinístico. Pero ...

- Para optimización directa

$$\vec{u} = -\begin{bmatrix} 8/13 \\ 3/13 \\ 1/13 \end{bmatrix} x_0$$

- Para programación dinámica

$$\vec{u} = -\begin{bmatrix} 8/13x_0 \\ 3/5x_1 \\ 1/2x_2 \end{bmatrix}$$

Resulta ser lo mismo que optimizacón directa si usamos que $x_{k+1} = x_k + u_k$, pero en la práctica usaremos la ley realimentada de aquí

Diferencias entre MPC determinístico e incierto

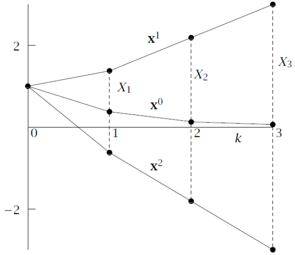
La solución en lazo abierto (optimización directa) genera los estados:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + u_0 + w_0 & &= \tfrac{5}{13}x_0 + w_0 \\
x_2 &= x_1 + u_1 + w_1 & & \\
x_2 &= x_0 + u_0 + u_1 + w_0 + w_1 & &= \tfrac{2}{13}x_0 + w_0 + w_1 \\
x_3 &= x_2 + u_2 + w_2 & & \\
x_2 &= x_0 + u_0 + u_1 + u_2 + w_0 + w_1 + w_2 & &= \tfrac{1}{13}x_0 + w_0 + w_1 + w_2
\end{aligned}
$$

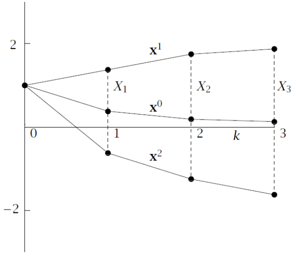
La solución en lazo cerrado (prog. dinámica) genera los estados:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + u_0 + w_0 & &= \tfrac{5}{13}x_0 + w_0 \\
x_2 &= x_1 + u_1 + w_1 & & \\
x_2 &= x_1 - \tfrac{3}{5}x_1 + w_1 & &= \tfrac{2}{13}x_0 + \tfrac{2}{5}w_0 + w_1 \\
x_3 &= x_2 + u_2 + w_2 & & \\
x_2 &= x_2 - \tfrac{x_2}{2} + w_2 & &= \tfrac{1}{13}x_0 + \tfrac{1}{13}w_0 + \tfrac{1}{2}w_1 + w_2
\end{aligned}
$$

Diferencias entre MPC determinístico e incierto



(a) Open-loop trajectories.



(b) Feedback trajectories.

Las componentes nominales (nos referiremos así a las componentes determinísticas/valor esperado) son las mismas, pero las asociadas a la incerteza son mucho mejores al considerar la optimización en lazo cerrado.

Esto se debe a que se está incorporando más información en la optimización: el controlador es capaz de reaccionar a perturbaciones.

Diferencias entre MPC determinístico e incierto

- Solución en lazo abierto: se optimiza sobre una secuencia "conocida" de acciones de control

$$\pi = \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$$

- Solución en lazo cerrado: se optimiza sobre una secuencia de funciones del estado

$$\pi = \{u_0(x_0), u_1(x_1), \dots, u_{N-1}(x_{N-1})\}$$

En el caso determinístico ambas soluciones entregan soluciones equivalentes.

En el caso con incerteza la solución en lazo cerrado es mejor.

MPC Robusto con incerteza aditiva

Consideraremos sistemas lineales del tipo

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Dw_k$$

con restricciones

$$Fx_k + Gu_k \leq \mathbf{1}$$

con $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ y además

$$w \in \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ es de dimensión completa (volumen distinto de cero) y contiene el origen en su interior, D es de rango completo $\mathrm{rango}(D) = n_w$.
Notar que la condición que $\mathbf{W}$ contenga el interior no es restrictiva.

MPC Robusto con incerteza aditiva

Ejemplo: radiación solar

$$I_k = d_k + w_k$$

d_k es un valor conocido (que se puede interpretar como un valor esperado), y w_k está contenido en un conjunto que sí contiene el origen en su interior.

Asumamos parar propósitos ilustrativos que $d_k = d$ es constante.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + D(d_k + w_k) \\ &= Ax_k + Bu_k + Dd_k + Dw_k \end{aligned}$$

Claramente el origen no es punto de equilibrio. Pero podemos trabajar con un cambio de coordenadas en torno a un nuevo punto de equilibrio:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} + Dd$$

y luego podemos operar en el sistema $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{u} = u - \bar{u}$

$$\tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + B\tilde{u}_k + Dw_k$$

MPC Robusto con incerteza aditiva

Caracterización de $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} = \text{conv}\{w^i : \ j = 1, \dots, m\}$$

o bien

$$\mathbf{W} = \{w : \ Vw \leq \mathbf{1}\}.$$

Se asume que $w_k, w_{k+1}, \dots$ son desconocidos en el instante k. El efecto de $w_0, w_1, \dots, w_{k-1}$ puede ser "conocido" a través de x_k (a pesar que no es realmente necesario). El valor que toma w_k es independiente del valor de w_j para todo $k \neq j$.

MPC Robusto con incerteza aditiva

Las predicciones para el estado se pueden expresar como:

$$x_k = A^k x_0 + A^{k-1} B u_0 + \ldots + B u_{k-1} + A^{k-1} D w_0 + \ldots + D w_{k-1}$$

Aquí se puede observar uno de los problemas con la optimización en lazo abierto: las componentes asociadas a la incerteza pueden diverger si A es inestable. Luego las restricciones serán infactibles para N grande.

En principio entonces queremos realizar una optimización en lazo cerrado, pero optimizar sobre secuencias de funciones es muy costoso computacionalmente. Por esto, en general se optimiza sobre parametrizaciones que simplifican el problema.

MPC Robusto con incerteza aditiva

Se utilizará parametrización:

$$u_{k+j|k} = Kx_{k+j|k} + c_{k+j|k}$$

si $j = 0, \ldots, N-1$, y $u_{k+j|k} = Kx_{k+j|k}$ si $j \geq N$.

Las predicciones ahora son

$$\begin{aligned} x_k = & (A+BK)^k x_0 + (A+BK)^{k-1} Bc_0 + \ldots + Bc_{k-1} \\ & + (A+BK)^{k-1} Dw_0 + \ldots + Dw_{k-1} \end{aligned}$$

Como $A + BK$ es estable, la componente incierta ahora sí converge, independiente de la estabilidad de A.

MPC Robusto con incerteza aditiva

- Imposición de restricciones $(Fx_k + Gu_k \leq \mathbf{1})$

Veamos que

$$
\begin{aligned}
Fx_k + Gu_k &= (F + GK)x_k + Gc_k \\
&= \tilde{F}\left(\Phi^k x_0 + \Phi^{k-1}Bc_0 + \ldots + Bc_{k-1}\right) + Gc_k \\
&+ \tilde{F}\left(\Phi^{k-1}Dw_0 + \ldots + Dw_{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{F} = F + GK$, $\Phi = A + BK$. Si expresamos las predicciones de acuerdo a lo conocido en el instante k, obtenemos

$$
\begin{aligned}
Fx_{k+j|k} + Gu_{k+j|k} = \tilde{F}\left(\Phi^j x_{k|k} + \Phi^{j-1}Bc_{k|k} + \ldots + Bc_{k+j-1|k}\right) + Gc_{k+j|k} \\
+ \tilde{F}\left(\Phi^{1-1}Dw_{k|k} + \ldots + Dw_{k+j-1|k}\right)
\end{aligned}
$$

la primera línea corresponde a la componente determinística, y la segunda línea corresponde a la componente incierta (respecto al instante k).

MPC Robusto con incerteza aditiva

Surge la pregunta: Cómo se maneja la componente incierta si no se conocen sus valores?

En Control Predictivo Robusto, se utilizan enfoques de peor caso.

Sea $x_k = \bar{x}_k + e_k$, donde $\bar{x}_k$ es la componente nominal/determinística, y e_k es la componente incierta del estado. Luego, para $j = 0, \ldots, N-1$:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_{k+j|k} &= \Phi^j x_{k|k} + \Phi^{j-1} B c_{k|k} + \ldots + B c_{k+j-1|k} \\
e_{k+j|k} &= \Phi^{j-1} B w_{k|k} + \ldots + B w_{k+j-1|k}
\end{aligned}
$$

Luego la restricción $F x_{k+j|k} + G u_{k+j|k} \leq \mathbf{1}$ se invoca como:

$$
\begin{aligned}
F x_{k+j|k} + G u_{k+j|k} = (F + GK) x_{k+j|k} + G c_{k+j|k} \\
\tilde{F} \bar{x}_{k+j|k} + G c_{k+j|k} + \tilde{F} e_{k+j|k} \\
\tilde{F} \bar{x}_{k+j|k} + G c_{k+j|k} + \beta_j \leq \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

MPC Robusto con incerteza aditiva

donde

$$\begin{aligned}\beta_j &= \max_{\mathbf{w}_k \in \mathbf{W}^j} \tilde{F} e_k \\ &= \max_{w_{k|k},\ldots,w_{k+j-1|k} \in \mathbf{W}^j} \tilde{F}\left(\Phi^{j-1} D w_{k|k} + \ldots + D w_{k+j-1|k}\right)\end{aligned}$$

Esta definición sugiere la siguiente recursión

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 0 \\ \beta_{j+1} &= \beta_j + \max_{w \in \mathbf{W}} \tilde{F}\Phi^j D w \\ &= \max_{w \in \mathbf{W}} \tilde{F}\Phi^j D w + \ldots + \max_{w \in \mathbf{W}} \tilde{F} D w.\end{aligned}$$

Notar que la optimización

$$\max_{w \in \mathbf{W}} \tilde{F}\Phi^j D w$$

se puede resolver tan solo evaluando la expresión $\tilde{F}\Phi^j D w$ en los vértices de $\mathbf{W}$ si son conocidos, o mediante un programa lineal.

MPC Robusto con incerteza aditiva

Luego, en el Modo 1, i.e. $j = 0, \ldots, N-1$ la restricción $Fx_{k+j|k} + Gu_{k+j|k} \leq \mathbf{1}$ se invoca como:

$$\tilde{F}\bar{x}_{k+j|k} + Gc_{k+j|k} + \beta_j \leq \mathbf{1}$$

donde el valor de β_j ha sido calculado previamente.