

Pauta P2 C2

(a) muestra $X_1, \dots, X_{10}$

Hay una fuente
puntual
→ deben situarse
en $\theta = 0$

Verosimilitud L

$$L = \prod_{i=1}^{10} P_B(X_i | B) = \prod_{i=1}^{10} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$\sim \text{Poisson}$

sea $\Delta = \log(L)$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{10} \log \left(e^{-\lambda_i} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right) = \sum_{i=1}^{10} \log(e^{-\lambda_i}) + \log(\lambda^{x_i}) - \log(x_i!)$$

$$= \sum_{i=1}^{10} -\lambda_i + x_i \log(\lambda) - \log(x_i!)$$

$$= \sum_{i=1}^{10} -(Fg_i + B) + x_i \log(Fg_i + B) - \log(x_i!)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial B} = \sum_{i=1}^{10} -1 + \frac{x_i}{Fg_i + B} = -10 + \sum_{i=1}^{10} \frac{x_i}{Fg_i + B} \stackrel{!}{=} 0$$

Acá podían asumir

$$g_1 = g_2 = \dots = g_{10} = g$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{1}{Fg+B} \sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{1}{Fg+B} \bar{X}$$

$\equiv \bar{X}$

Despejando para B

$$\Rightarrow \boxed{\hat{B}_{ML} = -Fg + \frac{\bar{X}}{10}} \leftarrow (1.0)$$

$$E(\hat{B}_{ML}) = E\left[-Fg + \frac{\bar{X}}{10}\right]$$

$$= E[-Fg] + \frac{1}{10} E[\bar{X}] =$$

$$= E[-Fg] + \frac{1}{10} 10\lambda = -Fg + \lambda$$

$$= -Fg + Fg + B = B$$

$$\Rightarrow \text{Es insesgado} \leftarrow (0,5)$$

$$\text{Var}\{\hat{B}_{ML}\} = \underbrace{\text{Var}[-Fg]}_0 + \frac{1}{10^2} \text{Var}[\bar{X}]$$

$$= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} \text{Var}[X_i] = \frac{10\lambda}{100}$$

← (0,5)

$$\rightarrow \text{Var}[\hat{B}_{ML}] = \frac{\lambda}{10} = \frac{1}{10} (Fg + B)$$

b) Ahora hay 2 sets de observaciones

$$X_1^1, \dots, X_{10}^1 \text{ y } X_1^2, \dots, X_{10}^2$$

$$L = \left(\prod_{i=1}^{10} f_B(X_i^1 | B) \right) \left(\prod_{i=1}^{10} f_B(X_i^2 | B) \right)$$

$$\rightarrow \Delta = \sum_{i=1}^{10} \log(f_B(X_i^1 | B)) + \log(f_B(X_i^2 | B))$$

← (0,5)

Idéntico a la parte anterior
sumando los 2 Δ 's

$$\rightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial B} = \sum_{i=1}^{10} -1 - 1 + \frac{X_i^1}{Fg_i + B} + \frac{X_i^2}{Fg_i + B} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^1 + x_i^2 = 20(Fg + B)$$

$$\Rightarrow \hat{B}_{ML} = -Fg + \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{10} x_i^1 + x_i^2$$

← 0,5

$$E(\hat{B}_{ML}) = -Fg + \frac{1}{20} E \left[\sum_{i=1}^{20} x_i^1 + x_i^2 \right]$$

$$= -Fg + \frac{20\lambda}{20} = B \text{ insesgado}$$

$$\text{Var}(\hat{B}_{ML}) = \text{Var}[\underbrace{-Fg}_0] + \frac{1}{20^2} 20\lambda$$

$$= \frac{1}{20} (Fg + B) \leftarrow (0,5)$$

(C) Debían notar en las partes a y b que la varianza les da o le mita. Lo más común era cuantificar una genencia de 2 de b) respecto a a), pero la pregunta no era tan cerrada, se podía justificar de más formas $\leftarrow (0,5)$

(d) Viendo las partes anteriores se puede deducir que el agregar n sets

$$\hat{B}_{ML} = -Fg + \frac{1}{n \cdot 10} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^n X_i^j$$

con j denotando el j-ésimo set de observaciones.

$\leftarrow (0,5)$

$$E(\hat{\beta}_{ML}) = -Fg + \frac{10 \cdot n \lambda}{10n} = \beta$$

← Sigue siendo insesgado

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{ML}) = \frac{1}{10n} (Fg + \beta)$$

← La varianza sigue cayendo
← 0,5

Luego si $n \rightarrow \infty$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{ML}) \rightarrow 0$$

y $\hat{\beta}_{ML}$ es en efecto consistente en probabilidad

← 1

0,5 →