EL-4002

Sistemas Digitales

Circuitos Lógicos Combinacionales

Parte 1: Circuitos de Compuertas y Ecuaciones Booleanas

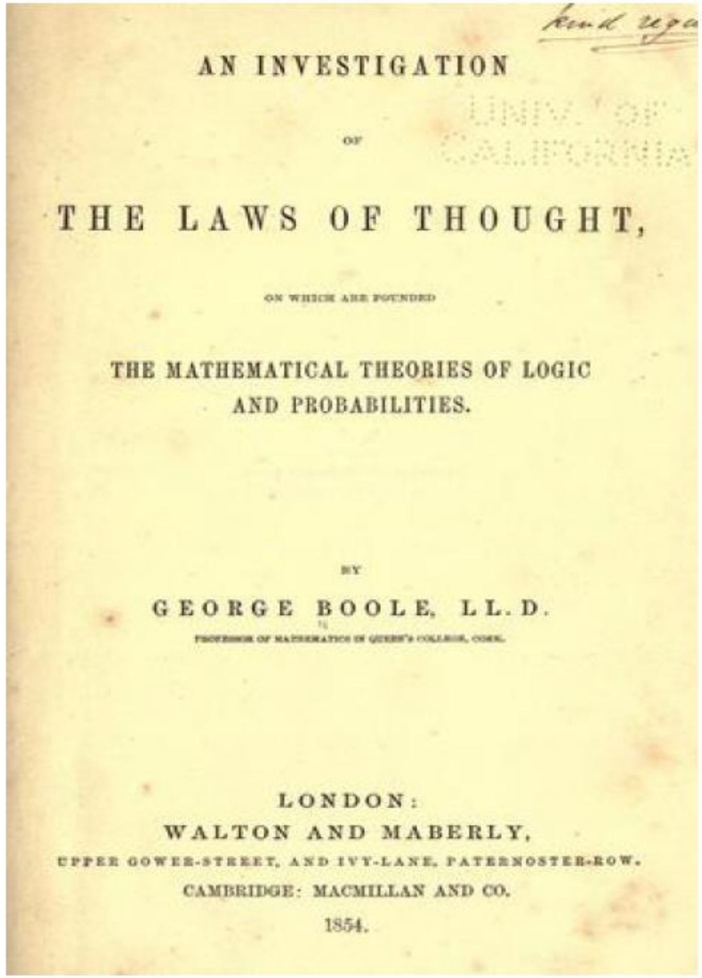
Lógica Binaria y Compuertas

- Las variables binarias toman uno de dos valores
- Los operadores lógicos operan con valores binarios y variables binarias
- Los operadores lógicos básicos son las funciones lógicas AND, OR y NOT
- Las compuertas lógicas implementan funciones lógicas
- Algebra de Boole: un sistema matemático muy útil para especificar y transformar funciones lógicas
- El Álgebra Booleana es la base del diseño y análisis de los sistemas digitales!

Lógica Binaria

El Álgebra Booleana es la base del diseño y análisis de los sistemas digitales.

- Steam Engine (1781)
- Maxwell equations (1862).
- On the Origin of Species (1859)
- First practical electric light system (1880)
- First Automobile (1885)



AN INVESTIGATION

OF

THE LAWS OF THOUGHT,

ON WHICH ARE FOUNDED

THE MATHEMATICAL THEORIES OF LOGIC AND PROBABILITIES.

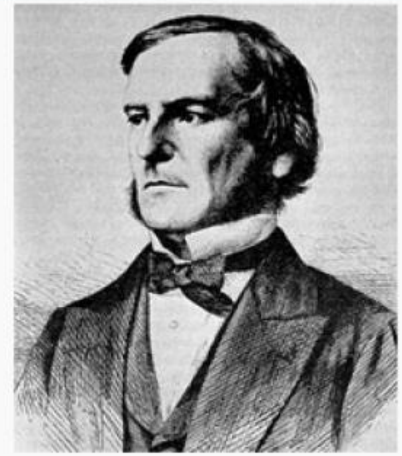
BY

GEORGE BOOLE, LL.D.

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN QUEEN'S COLLEGE, CORK.

LONDON:
WALTON AND MABERLY,
UPPER GOWER-STREET, AND IVY-LANE, PATERNOSTER-ROW.
CAMBRIDGE: MACMILLAN AND CO.
1854.

George Boole



Nacimiento	2 de noviembre de 1815 Lincoln, Lincolnshire, Inglaterra
Fallecimiento	8 de diciembre de 1864 Ballintemple, County Cork, Irlanda
Nacionalidad	Inglaterra Irlanda
Campo	Matemáticas, Lógica
Instituciones	Queen's College
Conocido por	Álgebra de Boole
Premios destacados	Medalla de la Royal Society

(Wikipedia)

Variables Binarias

- Recordemos que los dos valores binarios pueden tomar diferentes nombres:
  - Verdadero/Falso
  - Encendido (“On”)/Apagado (“Off”)
  - Si/No
  - 1/0
- Utilizamos 1 y 0 para designar a los dos valores
- Ejemplos de identificadores de variables:
  - Por ahora: A, B, y, z, ó X_1
  - Más adelante: RESET, CARGAR1 ó SUMA_01

Operaciones Lógicas

- Las tres operaciones lógicas básicas son:
  - AND
  - OR
  - NOT
- AND es designado por un punto (·)
- OR es designado por un signo mas (+)
- NOT es designado por una barra (¯), un apóstrofe (') o (~) antes de la variable

Ejemplos de Notación

- Ejemplos:
  - $Y = A \cdot B$, se lee como: “Y es igual a A AND B”
  - $z = x + y$, se lee como: “z es igual a x OR y”
  - $X = \bar{A}$, se lee como: “X es igual a NOT A”
- Nota: La declaración:
  - $1 + 1 = 2$ (se lee “uno más uno es igual a dos”) no es lo mismo que:
  - $1 + 1 = 1$ (se lee “1 OR 1 es igual a 1”)

Definición de los Operadores

- Las operaciones se definen en los valores "0" y "1" para cada operador:

AND	OR	NOT
$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	$\overline{0} = 1$
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

Tablas de Verdad

- *Tabla de Verdad*: un listado tabular de los valores de la función para todas las posibles combinaciones de valores en sus argumentos
- Ejemplo: Tablas de Verdad de las operaciones lógicas básicas:

AND		
X	Y	$Z = X \cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

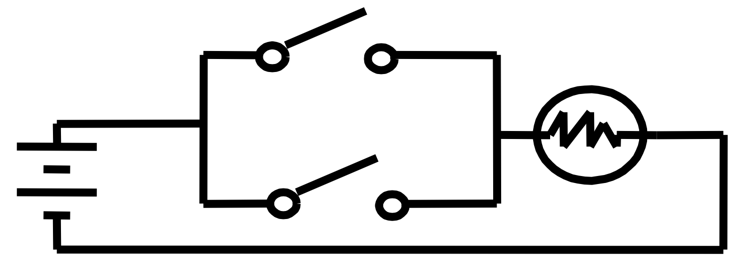
OR		
X	Y	$Z = X+Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT	
X	$Z = \overline{X}$
0	1
1	0

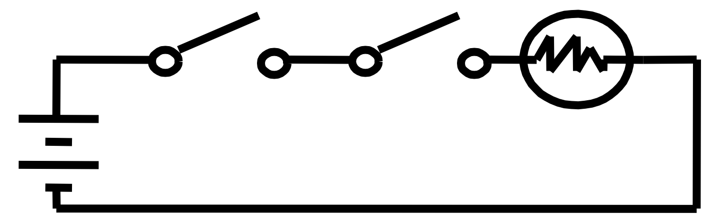
Implementación de las Funciones Lógicas

- Utilizando “Switches” (interruptores)
  - Para las entradas:
    - 1 lógico es <u>switch cerrado</u>
    - 0 lógico es <u>switch abierto</u>
  - Para las salidas:
    - 1 lógico es <u>luz encendida</u>
    - 0 lógico es <u>luz apagada</u>
  - NOT utiliza un switch tal que:
    - 1 lógico es <u>switch abierto</u>
    - 0 lógico es <u>switch cerrado</u>

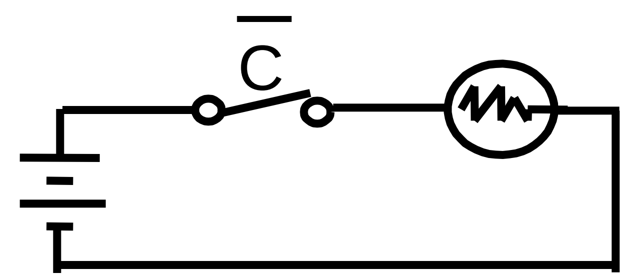
Switches en paralelo => OR



Switches en serie => AND

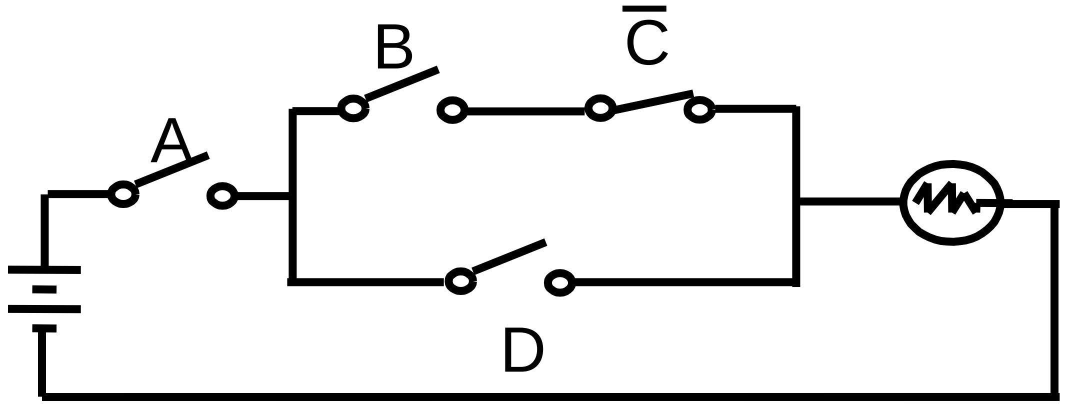


Switch normalmente cerrado => NOT



Implementación de las Funciones Lógicas (Cont.)

- Ejemplo: Lógica utilizando switches



- La luz se enciende (L = 1) para

$$L(A, B, C, D) = A\cdot((B\cdot\overline{C}) + D) = A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot D$$

y se apaga para (L = 0) en caso contrario

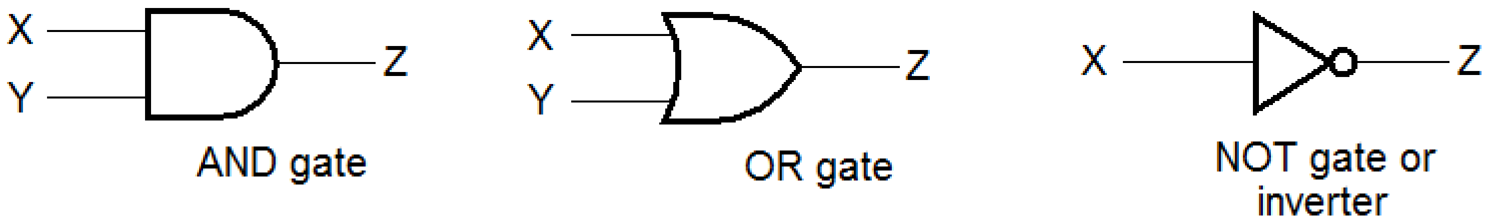
- Modelo que se aplica para circuitos con relé y para circuitos de compuertas CMOS, la base de la tecnología actual de lógica digital

Compuertas Lógicas

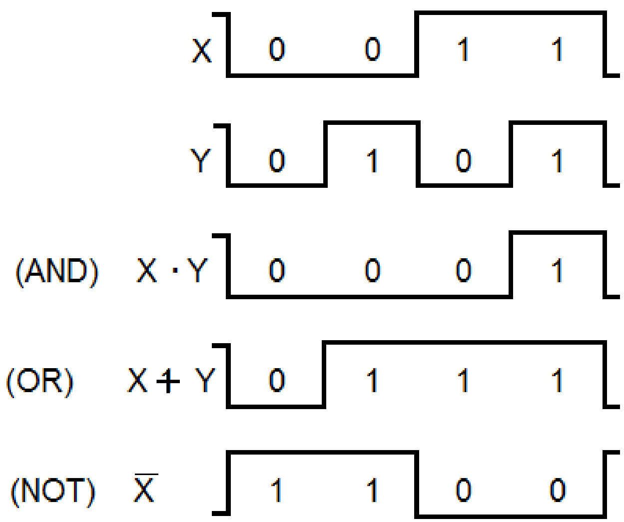
- En los primeros computadores, los switches eran abiertos y cerrados por el campo magnético de los solenoides de un *relé* (“*relay”)*. Los switches a su vez abrían y cerraban los caminos de la corriente
- Más tarde, los *tubos de vacío* (“*vacuum tubes”)* que abrían y cerraban los caminos de las corrientes electrónicamente, remplazaron a los relés.
- Hoy, los *transistores* son utilizados como switches electrónicos para abrir y cerrar caminos de corrientes

Símbolos de las Compuertas Lógicas y Comportamiento

- Las compuertas lógicas tienen símbolos especiales:

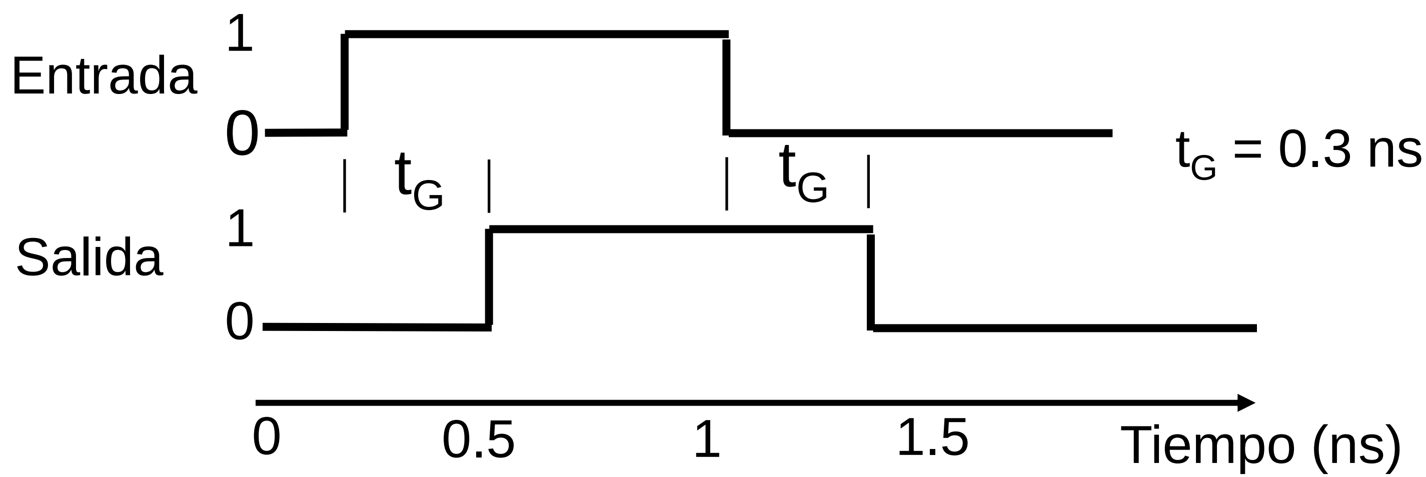


- Y formas de ondas de comportamiento en el tiempo:



Retardo de las Compuertas

- En compuertas reales, si cambian una o más entradas y produce un cambio en la salida, el cambio en la salida no ocurre instantáneamente
- El retardo entre el cambio de una o más entradas y el cambio de la salida es el *retardo de la compuerta* y se denomina t_G:



Diagramas Lógicos y Expresiones

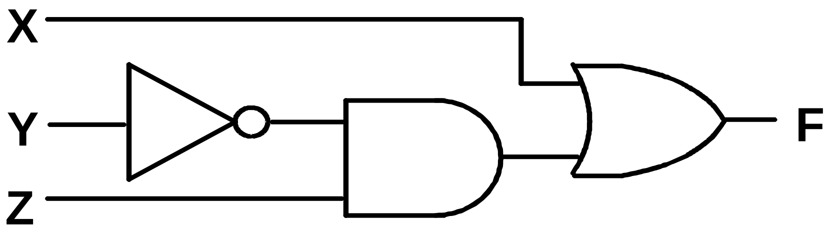
Tabla de Verdad

$X\,Y\,Z$	$F = X + \overline{Y} \cdot Z$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Ecuación

$$F = X + \overline{Y} \cdot Z$$

Diagrama Lógico



- Las ecuaciones booleanas, las tablas de verdad y los diagramas lógicos describen la misma función!
- Las tablas de verdad son únicas; las expresiones y los diagramas lógicos no lo son. Esto da flexibilidad en la implementación de una función

Álgebra de Boole

- Un Álgebra *Booleana* es un conjunto de elementos *B* con dos operaciones binarias (+) y (•), satisfaciendo los siguientes postulados o axiomas:

1. Si a, b Є B, entonces:

$$\text{(i) } a + b = b + a$$

$$\text{(ii) } a \bullet b = b \bullet a$$

esto es, + y • son ***Conmutativos***

2. Si a, b, c Є B, entonces:

$$\text{(i) } a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$$

$$\text{(ii) } a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$$

esto es, +(•) es ***Distributiva*** sobre •(+)

Álgebra de Boole (2)

3. El conjunto *B* tiene dos ***elementos identidad*** diferentes, denominados como 0 y 1, de tal manera que para cada elemento en *B*:

   (i) $a + 0 = 0 + a = a$

   (ii) $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

   Estos elementos 0 y 1 son el *elemento identidad aditivo* y el *elemento identidad multiplicativo*, respectivamente. No confundir con los enteros 0 y 1

4. Para cada elemento $a \in B$, existe un elemento a', llamado ***complemento***, tal que:

   (i) $a + a' = 1$

   (ii) $a \bullet a' = 0$

Teoremas

- ***Teorema A.1*** (***Principio de Dualidad***)

  Toda identidad algebraica deducible de los postulados del Algebra de Boole permanecen válidas si:
  - Se intercambian las operaciones (+) y (•), y
  - Se intercambian los elementos identidades 0 y 1
- ***Teorema A.2***

  Todo elemento en *B* tiene un ***único*** complemento
- ***Teorema A.3***

  Para cualquier a Є *B* se tiene:

  (1) $a + 1 = 1$

  (2) $a \bullet 0 = 0$
- ***Teorema A.4***

  El complemento del elemento 1 es 0 y vice versa:

  (1) $0' = 1$

  (2) $1' = 0$

Teoremas

- ***Teorema A.5 (Ley de Idempotencia)***

  Para cualquier a Є *B* se tiene:

  $$(1)\ a + a = a$$
  $$(2)\ a \cdot a = a$$

- ***Teorema A.6 (Ley de Involución)***

  Para todo a Є *B* se tiene:

  $$(a')' = a$$

- ***Teorema A.7 (Ley de Absorción)***

  Para cada par de elementos a y b en *B:*

  $$(1)\ a + a \cdot b = a$$
  $$(2)\ a \cdot (a + b) = a$$

- ***Teorema A.8***

  Para cada par de elementos a y b en *B:*

  $$(1)\ a + a' \cdot b = a + b$$
  $$(2)\ a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

Teoremas

- ***Teorema A.9 (Asociatividad)***

  En un Álgebra Booleana, cada una de las operaciones (+) y (•) es asociativa. Esto es, para cada a, b, c Є *B* se tiene:

  $$(1)\ a + (b + c) = (a + b) + c$$
  $$(2)\ a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

- ***Teorema A.10 (Ley de DeMorgan)***

  Para cada par de elementos a y b en *B:*

  $$(1)\ (a + b)' = a' \bullet b'$$
  $$(2)\ (a \bullet b)' = a' + b'$$

- ***Teorema A.11*** (***Generalización Ley de DeMorgan***)

  $$(1)\ (a + b + \ldots + c + d)' = a' \bullet b' \ldots c' \bullet d'$$
  $$(2)\ (a \bullet b \bullet \ldots c \bullet d)' = a' + b' \ldots c' + d'$$

- ***Teorema A.12***

  El Álgebra de Switching es un Álgebra de Boole

El Principio de Dualidad en el Algebra de Boole

- Al menos que sea auto dual, la expresión dual no es igual a la expresión original
- Ejemplo: $F = (A + \overline{C}) \cdot B + 0$

  dual $F = (A \cdot \overline{C} + B) \cdot 1 = A \cdot \overline{C} + B$
- Ejemplo: $G = X \cdot Y + (\overline{W + Z})$

  dual $G =$
- Ejemplo: $H = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$

  dual $H =$
- ¿Algunas de estas funciones es auto dual?

Precedencia de los Operadores Booleanos

- El orden de evaluación en una expresión Booleana es:
  - Paréntesis
  - NOT
  - AND
  - OR
- Consecuencia: los paréntesis aparecen alrededor de las expresiones OR
- Ejemplo: $F = A(B + C)(\overline{C} + D)$

Ejemplo 1: Demostraciones en Álgebra Booleana

- $A + A \cdot B = A$ (Teorema Absorción)

<u>Pasos demostración</u> <u>Justificación (identidad o teorema)</u>

$A + A \cdot B$	
$= A \cdot 1 + A \cdot B$	$X = X \cdot 1$ (Identidad)
$= A \cdot (1 + B)$	$X \cdot Y + X \cdot Z = X \cdot (Y + Z)$ (Distributividad)
$= A \cdot 1$	$1 + X = 1$ (Teorema A.3)
$= A$	$X \cdot 1 = X$ (Identidad)

- La razón primordial para hacer demostraciones es aprender:
  - Uso eficiente y cuidado de las identidades y los teoremas de álgebra de Boole, y
  - Cómo elegir la identidad apropiada o teorema a aplicar para avanzar, independientemente de la aplicación

Ejemplo 2: Demostraciones en Álgebra Booleana

- $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$ (Teorema del Consensus)
- Pasos demostración Justificación (identidad o teorema)

$AB + \bar{A}C + BC$

$= AB + \bar{A}C + 1 \cdot BC$ $\quad 1 \cdot X = X$

$= AB + \bar{A}C + (A + \bar{A}) \cdot BC$ $\quad X + \bar{X} = 1$

$= AB + \bar{A}C + ABC + \bar{A}BC$ $\quad X(Y + Z) = XY + XZ$ (Dist.)

$= AB + ABC + \bar{A}C + \bar{A}BC$ $\quad X + Y = Y + X$ (Conmut.)

$= AB \cdot 1 + ABC + \bar{A}C \cdot 1 + \bar{A}C \cdot B$ $\quad X \cdot 1 = X, X \cdot Y = Y \cdot X$ (C.)

$= AB(1 + C) + \bar{A}C(1 + B)$ $\quad X(Y + Z) = XY + XZ$ (Dist.)

$= AB \cdot 1 + \bar{A}C \cdot 1 = AB + \bar{A}C$ $\quad X \cdot 1 = X$

Ejemplo 3: Demostraciones en Álgebra Booleana

- $\overline{(x + y)}z + x\bar{y} = \bar{y}(x + z)$
- Pasos demostración Justificación (identidad o teorema)
- $\overline{(x + y)}z + x\bar{y}$

$= \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}$	$\overline{(a + b)} = \bar{a}\cdot\bar{b}$ (DeMorgan)
$= \bar{y}\bar{x}z + \bar{y}x$	$a\cdot b = b\cdot a$ (Conmutatividad)
$= \bar{y}(\bar{x}z + x)$	$a(b + c) = ab + ac$ (Distr.)
$= \bar{y}(\bar{x} + x)(z + x)$	$a + bc = (a + b)(a + c)$ (Distr.)
$= \bar{y}\cdot 1\cdot(z + x)$	$a + a = 1$
$= \bar{y}(x + z)$	$1\cdot a = a$, $a + b = b + a$ (Conmut.)

Teoremas Útiles

- $x \cdot y + \overline{x} \cdot y = y$ Minimización

  $(x + y) \cdot (\overline{x} + y) = y$
- $x + x \cdot y = x; \;\; x \cdot (x + y) = x$ Absorción
- $x + \overline{x} \cdot y = x + y; \;\; x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$ Simplificación
- $xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$ Consensus

  $(x + y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$
- $(\overline{x + y}) = \overline{x} \cdot \overline{y}; \;\; \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$ DeMorgans

Evaluación de Funciones Booleanas

- $F1 = xy\overline{z}$
- $F2 = x + \overline{y}z$
- $F3 = \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}$
- $F4 = x\overline{y} + \overline{x}z$

x	***y***	***z***	***F1***	***F2***	***F3***	***F4***
0	0	0	0	0		
0	0	1	0	1		
0	1	0	0	0		
0	1	1	0	0		
1	0	0	0	1		
1	0	1	0	1		
1	1	0	1	1		
1	1	1	0	1		

Simplificación de Expresiones Booleanas

- Una aplicación del Algebra de Boole
- Simplificar para obtener el menor número de literales (variables complementadas y no complementadas):
- $AB + \bar{A}CD + \bar{A}BD + \bar{A}C\bar{D} + ABCD$

$$= AB + ABCD + \bar{A}CD + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}BD$$

$$= AB + AB(CD) + \bar{A}C(D + \bar{D}) + \bar{A}BD$$

$$= AB + \bar{A}C + \bar{A}BD = B(A + \bar{A}D) + \bar{A}C$$

$$= B(A + D) + \bar{A}C \Rightarrow 5 \text{ literales}$$

Complementar Funciones

- Se utiliza el Teorema de DeMorgan para complementar una función:
  - Intercambiar operadores AND y OR
  - Complementar cada valor constante y literal
- Ejemplo: Complementar $F = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$

  $\bar{F} = (x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)$
- Ejemplo: Complementar $G = (\bar{a} + bc)\bar{d} + e$

  $\bar{G} =$

Formas o Expresiones Canónicas

- ¿Qué son las Formas Canónicas?
- Minitérminos and Maxitérminos
- Representación Índices de Minitérminos y Maxitérminos
- Representación Sumas de Minitérminos (SdM)
- Representación Productos de Maxitérminos (PdM)
- Representación de Complementos de Funciones
- Conversiones entre Representaciones

Formas Canónicas

- Es útil especificar una función Booleana en una forma que:
  - Permita una comparación de igualdad
  - Tenga una correspondencia a una tabla de verdad
- Formas Canónicas más comunes:
  - Suma de Minitérminos (SdM) – Suma de Productos
  - Producto de Maxitérminos (PdM) – Productos de Sumas

Minitérminos

- Los <u>Minitérminos</u> son términos AND entre cada variable presente, ya sea en su forma normal o complementada
- Dado que cada variable binaria puede aparecer normal (p.e. x) o complementada ($\bar{x}$), hay 2^n minitérminos para n variables
- <u>Ejemplo:</u> Dos variables (X e Y) producen 2 x 2 = 4 combinaciones:
  - XY (ambas normales)
  - $X\bar{Y}$ (X normal, Y complementada)
  - $\bar{X}Y$ (X complementada, Y normal)
  - $\bar{X}\bar{Y}$ (ambas complementadas)
- Así hay <u>cuatro minitérminos</u> de dos variables

Maxitérminos

- <u>Los Maxitérminos</u> son términos OR con cada variable en forma normal o complementada.
- Dado que cada variable binaria puede aparecer normal (p.e. x) o complementada ($\overline{x}$), hay 2^n maxitérminos para n variables
- <u>Ejemplo:</u> Dos variables (X e Y) producen 2 x 2 = 4 combinaciones:
  - $X + Y$ (ambas normales)
  - $X + \overline{Y}$ (X normal, Y complementada)
  - $\overline{X} + Y$ (X complementada, Y normal)
  - $\overline{X} + \overline{Y}$ (ambas complementadas)

Maxitérminos y Minitérminos

- Ejemplos: minitérminos y maxitérminos de dos variables

Índice	**Minitérmino**	**Maxitérmino**
0	$\overline{x}\,\overline{y}$	$x + y$
1	$\overline{x}\,y$	$x + \overline{y}$
2	$x\,\overline{y}$	$\overline{x} + y$
3	$x\,y$	$\overline{x} + \overline{y}$

- El índice anterior es importante para describir cuales variables en los términos son normales y cuales son complementadas

Orden Estándar

- Los minitérminos y maxitérminos son designados con un subíndice
- El subíndice es un número, correspondiente al patrón binario
- Los bits en el patrón representan el estado complementado o normal de cada variable listada en un orden estándar
- Todas las variables tienen que estar presente en un minitérmino o maxitérmino y serán listadas en el <u>mismo orden</u> (normalmente alfabético)
- Ejemplo: Para las variables *a, b, c*:
  - Maxitérminos: $(a + b + \bar{c})$, $(a + b + c)$
  - Términos: $(b + a + c)$, $\bar{a}\, c\, b$, y $(c + b + a)$ NO están en un orden estándar
  - Minitérminos: $\bar{a}\, b\, c$, $a\, b\, c$, $\bar{a}\, b\, \bar{c}$
  - Términos: $(a + c)$, $\bar{b}\, c$, y $(\bar{a} + b)$ no contienen todas las variables

Propósito del Índice

- El <u>índice</u> para el minitérmino o maxitérmino, expresado como un número binario, es utilizado para determinar si la variable se muestra en la forma normal o en la forma complementada
- Para los Minitérminos:
  - “1” significa la variable está “No Complementada”, y
  - “0” significa la variable está “Complementada”
- Para los Maxitérminos:
  - “0” significa la variable está “No Complementada”, y
  - “1” significa la variable está “Complementada”

Ejemplo de Índice para Tres Variables

- Ejemplo: (para tres variables)
- Supongamos que las variable se denominan *X, Y,* y *Z.*
- El orden estándar es *X*, luego *Y* y luego *Z*
- El Índice 0 (base 10) = 000 (base 2) para tres variables. Todas las variables están complementadas para el minitérmino 0 ($\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$) y ninguna variable está complementada para el maxitérmino 0 (*X, Y, Z*)
  - Minitérmino 0, llamado $m_{0,}$ es $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$
  - Maxitérmino 0, llamado $M_{0,}$ es $(X + Y + Z)$
  - Minitérmino 6 ?
  - Maxitérmino 6 ?

Ejemplo Índices – Cuatro Variables

Índice **i**	Binario **Patrón**	Minitérmino **m_i**	Maxitérmino **M_i**
0	0000	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$(a+b+c+d)$
1	0001	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	?
3	0011	$\bar{a}\bar{b}cd$	$(a+b+\bar{c}+\bar{d})$
5	0101	$\bar{a}b\bar{c}d$	$(a+\bar{b}+c+\bar{d})$
7	0111	?	$(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$
10	1010	$a\bar{b}c\bar{d}$	$(a+b+c+d)$
13	1101	$ab\bar{c}d$	?
15	1111	$abcd$	$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})$

Relación entre Minitérminos y Maxitérminos

- Del Teorema de DeMorgan
  $\overline{x+y} = \bar{x}\cdot\bar{y}$, y $\overline{x\cdot y} = \bar{x}+\bar{y}$
- Ejemplo de dos variables:

$$\boldsymbol{M_2 = \bar{x} + y}, \quad y \quad \boldsymbol{m_2 = x\cdot\bar{y}}$$

  Luego M_2 es el complemento de m_2 y vice versa
- Ya que el Teorema de DeMorgan se cumple para *n* variables, lo anterior también se cumple para términos de *n* variables
- Dando: $\boldsymbol{M_i = \bar{m}_i}$ y $\boldsymbol{m_i = \overline{M}_i}$
- Por lo tanto M_i es el complemento de m_i.

Tablas de Función para Ambos

- Minitérminos de 2 variables

$x\ y$	m_0	m_1	m_2	m_3
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

Maxitérminos de 2 variables

$x\ y$	M_0	M_1	M_2	M_3
0 0	0	1	1	1
0 1	1	0	1	1
1 0	1	1	0	1
1 1	1	1	1	0

- Cada columna en la tabla de función maxitérmino es el complemento de la columna en la tabla de función minitérmino, ya que M_i es el complemento de m_i.

Observaciones

- En las tablas de función:
  - Cada minitérmino tiene uno y sólo un 1 presente en los 2^n términos (<u>un mínimo de 1s</u>). Todos los otros términos son 0
  - Cada maxitérmino tiene uno y sólo un 0 presente e los 2^n términos. Todos los otros términos son 1 (<u>un máximo de 1s</u>)
- Podemos implementar cualquier función “haciendo OR” los minitérminos correspondientes a los términos "1" en la tabla de función. Estos términos se llaman los minitérminos de la función
- Podemos implementar cualquier función “haciendo AND” los maxitérminos correspondientes a los términos “0" en la tabla de función. Estos términos se llaman los maxitérminos de la función
- Esto nos da dos <u>formas canónicas</u>:
  - <u>Suma de Minitérminos (SdM) – Suma de Productos</u>
  - <u>Producto de Maxitérminos (PdM) – Producto de Sumas</u>

para expresar cualquier función Booleana

Ejemplo Función Minitérmino

- Ejemplo: Encontrar $F_1 = m_1 + m_4 + m_7$
- $F1 = \bar{x}\,\bar{y}\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,z$

x y z	**índice**	***m1***	**+**	***m4***	**+**	***m7***	***= F1***
0 0 0	0	0	+	0	+	0	= 0
0 0 1	1	1	+	0	+	0	= 1
0 1 0	2	0	+	0	+	0	= 0
0 1 1	3	0	+	0	+	0	= 0
1 0 0	4	0	+	1	+	0	= 1
1 0 1	5	0	+	0	+	0	= 0
1 1 0	6	0	+	0	+	0	= 0
1 1 1	7	0	+	0	+	1	= 1

Ejemplo Función Minitérmino

- $F(A, B, C, D, E) = m_2 + m_9 + m_{17} + m_{23}$
- $F(A, B, C, D, E) =$

Ejemplo Función Maxitérmino

- Ejemplo: Implementar *F1* en maxitérminos:

$$F_1 = M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6$$

$$F_1 = (x + y + z) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z)$$

x y z	i	M_0	· M_2	· M_3	· M_5	· M_6	= F1
0 0 0	0	0	· 1	· 1	· 1	· 1	= 0
0 0 1	1	1	· 1	· 1	· 1	· 1	= 1
0 1 0	2	1	· 0	· 1	· 1	· 1	= 0
0 1 1	3	1	· 1	· 0	· 1	· 1	= 0
1 0 0	4	1	· 1	· 1	· 1	· 1	= 1
1 0 1	5	1	· 1	· 1	· 0	· 1	= 0
1 1 0	6	1	· 1	· 1	· 1	· 0	= 0
1 1 1	7	1	· 1	· 1	· 1	· 1	= 1

Ejemplo Función Maxitérmino

- $F(A,B,C,D) = M_3 \cdot M_8 \cdot M_{11} \cdot M_{14}$
- $F(A, B,C,D) =$

Suma Canónica de Minitérminos

- Cualquier función Booleana puede ser expresada como una <u>Suma de Minitérminos</u>
  - De la tabla de función, los minitérminos utilizados son los términos correspondiente a los 1's
  - Para expresiones Booleanas, primero se <u>expanden</u> todos los términos para listar explícitamente todos los minitérminos. Esto se hace “haciendo AND” toda variable faltante v con el término ($v + \bar{v}$)
- Ejemplo: Implementar $f(x,y) = x + \bar{x}\bar{y}$ como suma de minitérminos:
  - Primero se expanden los términos: $= x(y + \bar{y}) + \bar{x}\bar{y}$
  - Se aplica distributividad: $= xy + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$
  - Expresado como suma de minitérminos:

    $f(x,y) = m_3 + m_2 + m_0$

Otro Ejemplo SdM

- Ejemplo: $F = A + \overline{B}\,C$
- Se tienen tres variables, *A, B,* y *C* las cuales se toman e un orden estándar
- Se expanden los términos con las variables faltantes:
  - $F = A(B + \overline{B})(C + \overline{C}) + (A + \overline{A})\,\overline{B}C$
  - $\quad = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C$
- Se juntan los términos (eliminando los términos duplicados):
  - $F = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$
- Se expresa como SdM:
  - $F = m7+m6+m5+m4+m1= m1+m4+m5+m6+m7$

Notación Corta para SdM

- Del ejemplo anterior, se partió con:

$$F = A + \overline{B}C$$

- Se llegó a:

$$F = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

- Esto se puede expresar en forma reducida:

$$F(A, B, C) = \Sigma m(1,4,5,6,7)$$

- Se puede ver que se muestran explícitamente las variables en orden y se ha omitido el designador "*m*"

Productos de Maxitérminos Canónicos

- Cualquier Función Booleana se puede expresar como un <u>Producto de Maxitérminos</u>
  - De la tabla de función, los maxitérminos utilizados son los términos correspondientes a los 0's.
  - Para una expresión booleana, primero expandir todos los términos para listar explícitamente todos los maxitérminos. Esto se hace primero aplicando la segunda ley distributiva, haciendo OR de los términos de la variable v faltante con un término igual a $V \cdot \overline{V}$ y luego aplicando la ley distributiva nuevamente.
- Ejemplo: Convertir a un producto de maxitérminos:

$$f(x, y, z) = x + \overline{x}\,\overline{y}$$

  - Aplicar la ley distributiva:

$$x + \overline{x}\,\overline{y} = (x + \overline{x})(x + \overline{y}) = 1 \cdot (x + \overline{y}) = x + \overline{y}$$

  - Sumar variable faltante z:

$$x + \overline{y} + z \cdot \overline{z} = (x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z})$$

  - Expresar como PdM: $f = M_2 \cdot M_3$

Funciones Complementos

- El complemento de una función expresada como una suma de minitérminos se construye seleccionando los minitérminos faltantes de la suma de minitérminos canónica.
- Alternativamente, el complemento de una función expresada como Suma de Minitérminos es simplemente el Producto de Maxitérminos con los mismos índices.
- Ejemplo: Dado $F(x, y, z) = \Sigma_m(1,3,5,7)$

$$\overline{F}(x, y, z) = \Sigma_m(0,2,4,6)$$

$$\overline{F}(x, y, z) = \Pi_M(1,3,5,7)$$

Conversión Entre Formas

- Para convertir expresiones SdP a PdS (o vice versa), se siguen los siguientes pasos:
  - Encontrar la función complemente intercambiando los términos de la lista con los términos que no están en la lista
  - Cambiar de productos a sumas, o vice versa
- Ejemplo: Dado F: $F(x, \quad y, z) = \Sigma_m(1,3,5,7)$
- Formar el Complemento: $\bar{F}(x, y, z) = \Sigma_m(0,2,4,6)$
- Luego utilizar la otra forma con los mismos índices – se forma el complemento nuevamente, dando la otra forma de la función original:

$$F(x, y, z) = \Pi_M(0,2,4,6)$$

Formas Estándares

- <u>Forma Suma de Productos Estándar (SdP):</u> las expresiones son escritas como un OR de términos AND
- <u>Forma Producto de Sumas Estándar (PdS)</u>: las expresiones son escritas como un AND de términos OR
- Ejemplos: ABC + ABC + B
  - SdP: $ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + B$
  - PdS:$(A + B)\cdot(A + \overline{B} + \overline{C})\cdot C$
- Estas formas “mezcladas” <u>no son SdP ni PdS</u>
  - $(AB + C)\cdot(A + C)$
  - $AB\overline{C} + AC\cdot(A + B)$

Suma de Productos (SdP) Estándar

- Una suma de minitérminos formada por *n* variables, puede ser escrita directamente de una Tabla de Verdad
  - La implementación de esta forma es un circuito de compuertas de dos niveles, tal que:
  - El primer nivel consiste de compuertas AND de *n entradas*, y
  - El segundo nivel es una única compuerta OR (con menos que 2^n entradas)
- Esta forma a menudo puede ser simplificada, resultando un circuito más simple

Suma de Productos (SdP) Estándar

- Un ejemplo de simplificación:

$$F(A, B,C) = \Sigma m(1,4,5,6,7)$$

- Expresión en minitérminos:

$$F = \overline{A}\ \overline{B}\ C + A\ \overline{B}\ \overline{C} + A\ \overline{B}\ C + AB\overline{C} + ABC$$

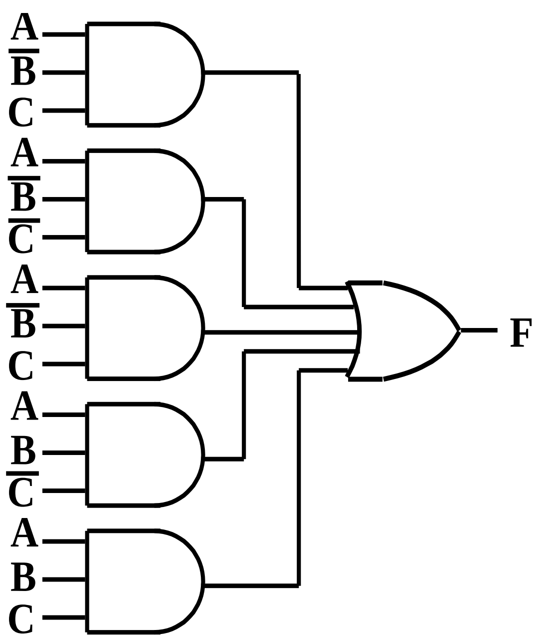
- Simplificando:

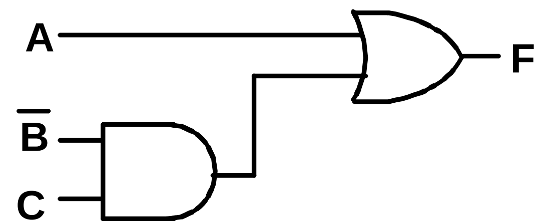
$$\begin{aligned} F &= \overline{A}\ \overline{B}\ C + A\ (\overline{B}\ \overline{C} + B\ \overline{C} + \overline{B}\ C + B\ C) \\ &= \overline{A}\ \overline{B}\ C + A\ (\overline{B} + B)\ (\overline{C} + C) \\ &= \overline{A}\ \overline{B}\ C + A\cdot 1\cdot 1 \\ &= \overline{A}\ \overline{B}\ C + A \\ &= \overline{B}C + A \end{aligned}$$

- La función *F* simplificada contiene 3 literales comparado con los 15 de la expresión de minitérminos original

Implementación AND/OR de Dos Niveles de una Expresión SdP

- Las dos implementaciones para F del ejemplo anterior. Es claro cuál es la más simple!





Observaciones a las SdP y PdS

- Los ejemplos previos muestran que:
  - Las Formas Canónicas (Suma de Minitérminos, Producto de Maxitérminos) u otras formas estándares (SdP, PdS) difieren en complejidad
  - El Álgebra de Boole puede ser utilizada para manipular las expresiones para obtener expresiones más simples
  - Expresiones más simples permiten implementaciones más simples de dos niveles
- Preguntas pendientes:
  - ¿Cómo se puede obtener la expresión “más simple”?
  - ¿Hay solamente un circuito de mínimo costo?
- La siguiente parte del curso tratará este problema