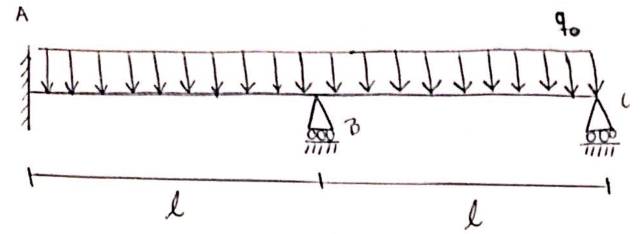
Pauta Ejercicio 6 - P2

Luis Cárcamo Del Río



⊛ Determinar $Q(x)$, $M(x)$, $v(x)$, $\theta(x)$.

Como siempre, partimos notando que:

$$GIE = \#\text{Reacciones} - \#\text{Ec. equilibrio}$$

$$= 5 - 3$$

$$\rightarrow \boxed{GIE = 2}$$

Luego del equilibrio de fuerzas en la hiperstática:

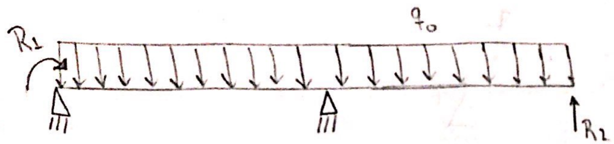
$$\underline{\Sigma F_x = 0} \rightarrow H_A = 0$$

$$\underline{\Sigma F_y = 0} \rightarrow V_A + V_B + V_C = 2q_0 l \qquad (1)$$

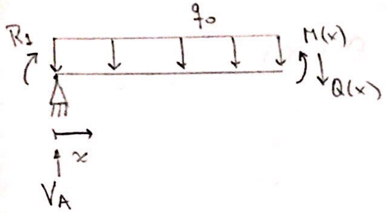
$$\underline{\Sigma M_A = 0} \rightarrow M_A = V_B l + 2V_C l - 2q_0 l^2 \qquad (2)$$

Escaneado con CamScanner

Vamos ahora a los esfuerzos internos, usando M_A y V_C como redundantes.



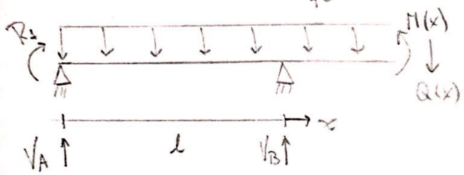
Tramo AB ($x \in (0, l)$)



$$\sum F_y = 0 : \; Q(x) = V_A - q_0 x$$

$$\sum M_x = 0 : \; M(x) = R_1 + V_A x - \frac{q_0 x^2}{2}$$

Tramo BC ($x \in (0, l)$)



$$\sum F_y = 0 : \; Q(x) = V_A + V_B - q_0 (x + l)$$

$$\sum M_x = 0 : \; M(x) = -\frac{q_0 (x+l)^2}{2} + R_1 + V_A (x+l) + V_B x$$

$$\rightarrow M(x) = (V_A + V_B - q_0 l) x + V_A l + R_1 - \frac{q_0 x^2}{2} - \frac{q_0 l^2}{2}$$

Recordando el método de la elástica:

Tramo AB:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(R_1 + V_A x - \frac{q_0 x^2}{2}\right) \quad \Big| \int () \, dx$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \theta(x) = \frac{1}{EI}\left(R_1 x + V_A \frac{x^2}{2} - \frac{q_0 x^3}{6}\right) + C_1 \quad \Big| \int () \, dx$$

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(R_1 \frac{x^2}{2} + V_A \frac{x^3}{6} - q_0 \frac{x^4}{24}\right) + C_1 x + C_2$$

Por el apoyo empotrado en A: $v(x=0) = 0 \rightarrow \underline{\underline{C_2 = 0}}$

Además, así como $v = 0$, el giro en A es nulo:

$$\theta(x=0) = 0 \longrightarrow \underline{\underline{C_1 = 0}}$$

De modo que:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{AB}(x) &= \frac{1}{EI}\left(R_1 \frac{x^2}{2} + V_A \frac{x^3}{6} - q_0 \frac{x^4}{24}\right) \\ \theta_{AB}(x) &= \frac{1}{EI}\left(R_1 x + V_A \frac{x^2}{2} - \frac{q_0 x^3}{6}\right) \end{aligned}}$$

Además en B, $v_{AB}(x = l) = 0$.

$$\rightarrow \left(R_1 \frac{l^2}{2} + V_A \frac{l^3}{6} - q_0 \frac{l^4}{24}\right) = 0 \qquad (3)$$

Tramo BC:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{EI}\left[(V_A + V_B - q_0 l)x + V_A l + R_1 - q_0 \frac{x^2}{2} - q_0 \frac{l^2}{2}\right] \quad \Big| \int () \, dx$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \theta(x) = \frac{1}{EI}\left[(V_A + V_B - q_0 l)\frac{x^2}{2} + V_A l x + R_1 x - q_0 \frac{x^3}{6} - q_0 l^2 \frac{x}{2}\right] + B_1 \quad \Big| \int () \, dx$$

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[(V_A + V_B - q_0 l)\frac{x^3}{6} + V_A l \frac{x^2}{2} + R_1 \frac{x^2}{2} - q_0 \frac{x^4}{24} - q_0 l^2 \frac{x^2}{4}\right] + B_1 x + B_2$$

En el apoyo B, debe haber continuidad del giro θ:

$$\theta_{AB}(x=l) = \theta_{BC}(x=0)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{EI}\left(R_1 l + V_A \frac{l^2}{2} - q_0 \frac{l^3}{6}\right) = B_1}}$$

Además, por continuidad de v en B:

$$v_{AB}(x=l) = v_{BC}(x=0)$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{EI}\left(R_1 \frac{l^2}{2} + V_A \frac{l^3}{6} - q_0 \frac{l^4}{24}\right)}_{=0 \quad (3)} = B_2$$

$$\rightarrow \underline{\underline{B_2 = 0}}$$

En el apoyo C:

$$v(x=l) = 0$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{EI}}\left[(V_A + V_B - q_0 l)\frac{l^3}{6} + V_A \frac{l^3}{2} + R_1 \frac{l^2}{2} - q_0 \frac{l^4}{24} - q_0 \frac{l^4}{4}\right] + \cancel{\frac{1}{EI}}\left(R_1 l^2 + V_A \frac{l^3}{2} - q_0 \frac{l^4}{6}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{7}{6} V_A \cancel{l^3} + \frac{1}{6} V_B \cancel{l^3} + \frac{3}{2} R_1 \cancel{l^2} = \frac{5}{8} q_0 \cancel{l^4}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{7}{6} V_A l + \frac{1}{6} V_B l + \frac{3}{2} R_1 = \frac{5}{8} q_0 l^2}} \quad (4)$$

De donde resultan 4 ecuaciones para las 4 incognitas que teníamos

En resumen.

(1) $V_A + V_B + V_C = 2 q_0 l$

(2) $M_A = V_B l + 2 V_C l - 2 q_0 l^2$

(3) $M_A \frac{l^2}{2} + V_A \frac{l^3}{6} = q_0 \frac{l^4}{24}$

Recordar : $M_A = R_1$

(4) $\frac{7}{6} V_A l + \frac{1}{6} V_B l + \frac{3}{2} R_1 = \frac{5}{8} q_0 l^2$

Resolviendo el sistema de 4x4:

$M_A = -\frac{q_0 l^2}{14}$	$V_A = \frac{13 q_0 l}{28}$	$V_B = \frac{8 q_0 l}{7}$	$V_C = \frac{11 q_0 l}{28}$

Queda reemplazar estos valores en $M(x)$, $Q(x)$, $\theta(x)$ y $v(x)$.

$$M_{AB}(x) = -\frac{q_0 l^2}{14} + \frac{13 q_0 l}{28} x - \frac{q_0}{2} x^2$$

$$M_{BC}(x) = -\frac{3 q_0 l^2}{28} + \frac{17 q_0 l}{28} x - \frac{q_0}{2} x^2$$

$$Q_{AB}(x) = \frac{13 q_0 l}{28} - q_0 x$$

$$Q_{BC}(x) = \frac{17 q_0 l}{28} - q_0 x$$

$$\theta_{AB}(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q_0 l^2}{14}x + \frac{13 q_0 l}{56}x^2 - \frac{q_0}{6}x^3\right)$$

$$\theta_{BC}(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q_0 l^3}{168} - \frac{3 q_0 l^2}{28}x + \frac{17 q_0 l}{56}x^2 - \frac{q_0}{6}x^3\right)$$

$$v_{AB}(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q_0 l^2}{28}x^2 + \frac{13 q_0 l}{168}x^3 - \frac{q_0}{24}x^4\right)$$

$$v_{BC}(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q_0 l^3}{168}x - \frac{3 q_0 l^2}{56}x^2 + \frac{17 q_0 l}{168}x^3 - \frac{q_0}{24}x^4\right)$$

Ya con esto calculado, es posible obtener los diagramas

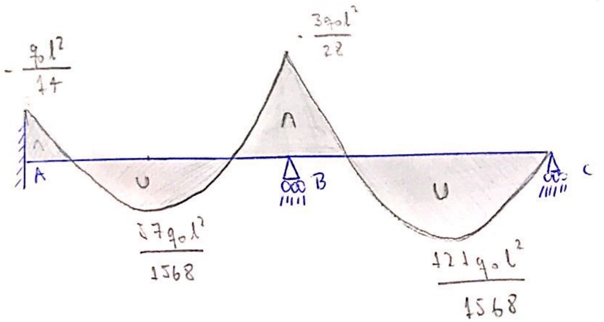
$M(x)$: En A, $M_{AB}(x=0) = -\frac{q_0 l^2}{14}$

En B, $M_{AB}(x=l) = -\frac{3 q_0 l^2}{28}$

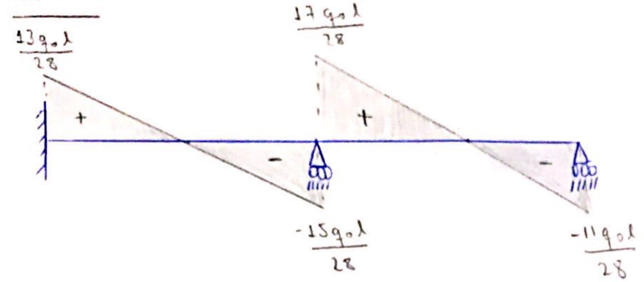
En C, $M_{BC}(x=l) = 0$

Mínimo tramo AB, $\frac{dM_{AB}}{dx} = 0 \longrightarrow x^* = \frac{13 l}{28}$, $M_{AB}^* = \frac{57 q_0 l^2}{1568}$

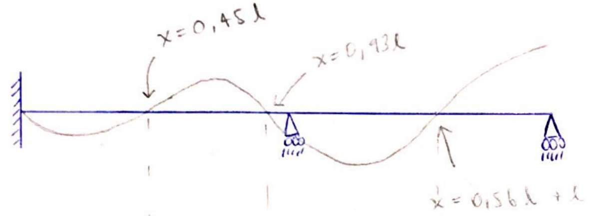
Mínimo tramo BC, $\frac{dM_{BC}}{dx} = 0 \longrightarrow x^{**} = \frac{17 l}{28}$, $M_{BC}^* = \frac{121 q_0 l^2}{1568}$



$Q(x)$:

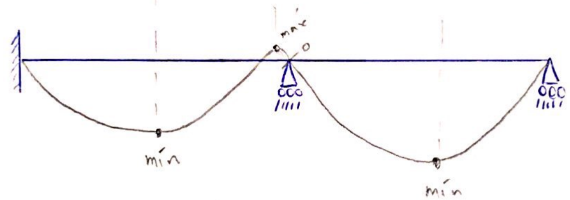


$\theta(x)$:



* La matraca es directa de analizar los puntos críticos de la función $\theta(x)$

$v(x)$:



* Al igual que para θ, el gráfico de $v(x)$, se obtiene del análisis de la función (cálculo)