Auxiliar 1 Astrofísica de Galaxias

Dinámica, Virial y Relajación

Profesora: Paulina Lira
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- **Masa de un cúmulo globular**

Se tiene un cúmulo globular cuya densidad $\rho(r)$ puede ser modelada por un perfil de Plummer:

$$\rho(r) = \frac{3M_0}{4\pi}\frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}$$

donde M_0 es la masa del cluster y a es un parámetro de escala de su centro, que tomaremos como $a = 10$pc. Se toma una muestra de estrellas y se mide una dispersión de velocidades radiales $\sigma_r \approx 10$kms. Asumiendo que el cluster es esférico y no contiene materia oscura, use el teorema del virial para derivar su masa.

Pauta P1.- Para que alguna estructura como un cluster se mantenga estable, este debe cumplir el teorema del virial

$$2\langle K\rangle + \langle U\rangle = 0$$

Es decir, que haya un balance entre la energía cinética y potencial totales del sistema. Empezemos calculando la energía potencial total del sistema, que podemos hacer integrando la energía de cada cascarón de radio r y masa $4\pi r^2\rho(r)$ hasta el infinito.

$$U = \int_0^\infty 4\pi r'^2\rho(r')\frac{GM(r')}{r'}dr'$$

Notemos que necesitamos primero calcular la masa hasta un radio r $M(r)$:

$$M(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = \frac{Mr^3}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

Por lo tanto la energía potencial total es

$$\begin{aligned} U &= -3GM_0^2a^2\int_0^\infty r'^4\frac{1}{(r'^2+a^2)^4}d'r \\ &= -\frac{3\pi GM_0^2}{32a} \end{aligned}$$

Para encontrar la energía cinética, usamos el dato de que al dispersión en el radio es $\sigma_r = 10\text{km/s}$. Si asumimos que el cluster tiene la misma dispersión en todas las direcciones, entonces la dispersión total es $\sigma^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\phi^2 + \sigma_\theta^2 = 3\sigma_r^2$. Por lo tanto, la energía cinética total es

$$K = \frac{1}{2} M_0 \sigma^2$$

Así, el teorema del virial nos dice que

$$\begin{aligned} M_0 \sigma^2 &= \frac{3\pi G M_0^2}{32a} \\ \Rightarrow M_0 &= \frac{32a\sigma_r^2}{\pi G} \\ &= 4{,}7 \times 10^{36} kg \end{aligned}$$

P2.- **Tiempo de relajación**

Considere el cúmulo globular 47 Tucane, con una masa estelar promedio de $m = 0{,}3 M_\odot$, $\Lambda = r_C/1\text{AU}$, dispersión radial $\sigma_r = 11\text{km/s}$, una densidad de $\rho_c = 10^{4,9}\text{M}_\odot/\text{pc}^3$ y $r_C = 0{,}7\text{pc}$.

1. Encuentre el tiempo de relajación t_{relax} en el centro del cúmulo.

2. Muestre que el crossing time t_{cross} es aproximadamente $t_{cross} \equiv 2r_C/\sigma_r \approx 10^{-3} t_{relax}$

Pauta P2.-

1. En clases se vio que nuestra galaxia no es un sistema donde la relajación ocurra, pero puede ser importante en estructuras más pequeñas como en los cúmulos globulares. La formula para el tiempo de relajación se puede escribir como

$$t_{relax} = \frac{2 \times 10^9 \text{yr}}{\ln \Lambda} \left(\frac{v}{10\text{km/s}} \right)^3 \left(\frac{m}{M_\odot} \right) \left(\frac{n}{10^3 \text{pc}^{-3}} \right)^{-1}$$

   Asumiendo isotropía, $v = \sqrt{3}\sigma_r = 49{,}05\text{km/s}$. La densidad numérica la podemos derivar de la densidad y la masa estelar promedio

$$\rho_C = nm \Rightarrow n = \frac{\rho_c}{m} = 2{,}6 \times 10^5 \text{pc}^{-3}$$

   de donde obtenemos un tiempo de relajación $t_{relax} = 4{,}9 \times 10^7\text{yr}$, que es mucho más razonable que el de una galaxia.

2. El tiempo de cruce, por la definición dad es

$$\begin{aligned} t_{cross} &= 4{,}2 \times 10^5 \text{yr} \\ \Rightarrow \frac{t_{cross}}{t_{relax}} &= 2{,}4 \times 10^{-3} t_{relax} \end{aligned}$$

   Por lo que el crossing time es 3 ordenes de magnitud menor al tiempo de relajación. Esto significa que para la relajación ocurra, una estrella debe cruzar el sistema aproximadamente 1000 veces.

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ **Número de relajación**

Muestre que para un cluster esférico con distribución uniforme, con N estrellas,

$$N_t \equiv \frac{t_{cross}}{t_{relax}} \sim \frac{N}{\ln N}$$

.

$\boxed{\textbf{Pauta P3.-}}$ En términos generales, si tomamos R como el radio del cluster, m como la masa estelar promedio, v como la velocidad relativa entre dos estrellas, y n como la densidad númerica, entonces N_t es

$$N_t = \frac{\frac{v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda}}{\frac{R}{v}} = \frac{v^4}{8\pi G^2 m^2 \ln \Lambda} \frac{4\pi R^2}{3N}$$

Tenemos que relacionar v, R y N de alguna manera. Usamos virial

$$\begin{aligned} 2K = -U \Rightarrow \frac{Nmv^2}{2} &= \frac{G(Nm)^2}{2R} \\ \Rightarrow R &= \frac{GNm}{v^2},\ N = \frac{Rv^2}{Gm} \\ \Rightarrow N_t &= \frac{1}{8\pi \ln \Lambda} \frac{4\pi}{3N} N^2 \\ &= \frac{N}{6 \ln \Lambda} \end{aligned}$$

Para relacionar Λ con N, podemos usar la distancia mínima de encuentros débiles como el radio de encuentros fuertes $r_s = 2GM/v^2$, y la distancia máxima como el radio R. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{R}{r_s} &= \frac{GNm}{v^2} \frac{v^2}{2Gm} = \frac{N}{2} \\ \Rightarrow \ln \Lambda &\approx \ln N \end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$N_t \sim \frac{N}{\ln N}$$

$\boxed{\textbf{P4.-}}$ **Movimiento del Sol**

El sol se mueve en una órbita aproximadamente circular alrededor del centro galáctico, a un radio $R_\odot = 8$kpc con velocidad $v_0 = 220$kms^{-1}.
Si toda la masa de la Vía Láctea estuviese concentrada en el centro, muestre que esta sería aproximadamente $7 \times 10^{10} M_\odot$ y que una estrella cercana se escaparía si se moviera a una velocidad mayor a $\sqrt{2} v_0$

$\boxed{\textbf{Pauta P4.-}}$

Tomamos el potencial kepleriano

$$\Phi(r) = \frac{-GM}{r}$$

La fuerza radial es igual a la fuerza centrípeta

$$F_r = -\nabla\Phi(R_\odot) = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{v_0^2}{R_\odot}$$

De aquí podemos derivar la masa

$$M(R_\odot) = \frac{v_0^2 R_\odot}{G}$$
$$\Rightarrow M(R_\odot) = 7{,}4 \times 10^{10}\mathrm{M}_\odot$$

La velocidad de escape es cuando la energía cinética y potencial de un objeto se igualan

$$\frac{mv_e^2}{2} = \frac{GMm}{R_\odot}$$
$$\Rightarrow v_e^2 = 2v_0^2$$