



# IN3701 - Modelamiento y Optimización

## Pauta Control 1

Profesores: Fernando Ordóñez, Andreas Wiese

Auxiliares: Cristián Lira, David Palacios, Diego Reyes, Jose Gonzalez, Macarena Osorio, Matias Muñoz, Pablo Pavez, Vicente Plaza

Ayudantes: Canela Meffert, Carolina Salgado, Daniel Monsalve, Daniela Fernández, Daniela Valdovinos, Mariana Quiroga, Maximiliano Martínez, Nicolás Acevedo

## 0. Tiempo

Por favor, escribe al final cuanto tiempo se demoró en total para hacer el control (excluyendo pausas). Para esto, tal vez le conviene de anotar ahora la hora cuando empieza. El tiempo oficial del control son 2 horas que corresponde al tiempo necesario en circunstancias normales (por ejemplo, una pieza tranquila). Puede ser que por su situación particular en su casa necesita mas tiempo. Le recomendamos de entregar el control después de  $2 + x$  horas, por un  $x$  que depende de su situación en particular, y *no* trabajar en el control durante toda la ventana de tiempo (24hrs).

## 1. Modelamiento

Imaginese que va comprar alimentos en un supermercado. Hay un conjunto  $A$  de alimentos, cada alimento  $a \in A$  tiene un precio de  $p_a$  CLP. Además, para cada alimento  $a \in A$  hay un valor  $r_a \geq 0$  que indica que tan rico es. Si  $r_a$  es mas grande, significa que es mas rico. Suponga que tiene  $P$  CLP disponibles. Quiere comprar alimentos con este presupuesto  $P$  que sean lo mas delicioso posible, es decir, quiere que la suma de los valores  $r_a$  para los alimentos escogidos sea lo mas grande posible.

1. Escriba un programa lineal o un programa lineal entero que modela el problema de seleccionar los alimentos que quiere comprar.

**Respuesta:**

Se define una variable de desición

$$x_a = 1 \text{ si compra el producto } a \text{ que pertenece a } A, 0 \text{ si no} \quad (1)$$

Dado esto, se define las restricciones como

$$\sum_{a \in A} x_a p_a \leq P \text{ Restricción de presupuesto} \quad (2)$$

$$x_a \in \{0, 1\} \text{ Naturaleza de las variables} \quad (3)$$

y finalmente se define la función objetivo como

$$\text{Max} \sum_{a \in A} x_a r_a \text{ Maximizar utilidad} \quad (4)$$

2. Ahora, adicionalmente, para cada alimento  $a \in A$  hay un peso  $q_a \geq 0$ . En su bolsa, puede transportar alimentos con un peso total de a lo más un valor  $Q > 0$  dado. Cambie su modelo de la parte anterior.

**Respuesta:**

Se agrega una nueva restriccion

$$\sum_{a \in A} x_a q_a \leq Q \text{ Restriccion de peso} \quad (5)$$

3. Asuma que hay un conjunto  $S$  de supermercados tal que para cada supermercado  $s \in S$  hay un conjunto de productos  $A_s$  que se puede comprar. Estos conjuntos  $\{A_s\}_{s \in S}$  reemplazan el conjunto (global)  $A$ . Asuma también que por razones de tiempo puede ir a lo más a tres supermercados para comprar. Cambie su modelo de la parte anterior.

**Respuesta:**

Ante el cambio de los conjuntos a usar, Se altera la variable de decisión anterior, y se agrega una variable de decisión nueva.

$$x_{as} = 1 \text{ si compra el producto } a \in A_s \text{ en el supermercado } s \in S, 0 \text{ si no} \quad (6)$$

$$Y_s = 1 \text{ si voy al super } s \text{ que pertenece a } S, 0 \text{ si no} \quad (7)$$

Dado esto, se definen las restricciones y se agregan nuevas

$$\sum_{a \in A, s \in S} x_{as} p_a \leq P \text{ Restricción de presupuesto} \quad (8)$$

$$\sum_{a \in A, s \in S} x_{as} q_a \leq Q \text{ Restricción de peso} \quad (9)$$

$$\sum_{s \in S} y_s \leq 3 \text{ Restricción de solo ir a 3 supers} \quad (10)$$

$$x_{as} \leq y_s \quad \forall a \in A_s, \quad \forall s \in S \text{ Solo compro si voy al super} \quad (11)$$

$$x_{as}, y_s \in \{0, 1\} \text{ Naturaleza de las variables} \quad (12)$$

y finalmente se define la función objetivo como

$$\text{Max} \sum_{a \in A_s, s \in S} x_{as} r_a \text{ Maximizar utilidad} \quad (13)$$

4. Entre los supermercados  $S$ , hay un conjunto especial  $S' \subseteq S$  que vende bolsas mágicas a un precio  $\bar{p}$  CLP. Si va a uno de los supermercados en  $S'$ , puede comprar esta bolsa mágica por  $\bar{p}$  CLP y entonces puede llevar todos los alimentos comprados en la bolsa, sin el límite del peso  $Q$ . Es posible ir a uno de los supermercados en  $S'$  y sólo comprar la bolsa. Cambie su modelo de la parte anterior.

**Respuesta:**

se agrega una variable de decisión nueva.

$$x_{as} = 1 \text{ si compra el producto } a \in A_s \text{ en el supermercado } s \in S, 0 \text{ si no} \quad (14)$$

$$y_s = 1 \text{ si voy al super } s \text{ que pertenece a } S, 0 \text{ si no} \quad (15)$$

$$z_s = 1 \text{ si compro la bolsa en el super } s \in S', 0 \text{ si no} \quad (16)$$

Dado esto, se definen las restricciones y se agregan nuevas

$$\sum_{a \in A, s \in S} x_{as} p_a + \sum_{s \in S} \bar{p} z_s \leq P \text{ Restricción de presupuesto} \quad (17)$$

$$\sum_{a \in A, s \in S} x_{as} q_a \leq Q + \sum_{s \in S} M z_s \text{ Restricción de peso, con } M \text{ siendo la } M \text{ grande} \quad (18)$$

$$\sum_{s \in S} y_s \leq 3 \text{ Restricción de solo ir a 3 supers} \quad (19)$$

$$x_{as} \leq y_s \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S \text{ Restricción de solo compro si voy al super} \quad (20)$$

$$z_s = 0 \quad \forall s \in S - S', z_s \leq y_s \quad \forall s \in S' \text{ Restricción solo compro bolsas en supers que las tienen} \quad (21)$$

$$x_{as}, y_s, z_s \in \{0, 1\} \text{ Naturaleza de las variables} \quad (22)$$

y finalmente se define la función objetivo como

$$\text{Max} \sum_{a \in A_s, s \in S} x_{as} r_a \text{ Maximizar utilidad} \quad (23)$$

enumerate

## 2. Geometria

- a) De un ejemplo de un poliedro  $P$  con al menos cinco restricciones que tenga al menos dos soluciones basicas factibles (SBF) y al menos una de ellas degenerada. Escriba el poliedro e identifique las SBF solicitadas. Indique las restricciones activas en esas SBF. *Pista: Tal vez le ayude de dibujar el poliedro.*

**Respuesta:**

Se debe señalar que cualquier poliedro que cumpla las características sirve, se mostrará el caso esperado, un triangulo degenerado.

$$(PL) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & 0 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \end{array}$$

Para ser solución básica factible en este poliedro se necesitan 2 restricciones L.I activas, y para ser SBF degenerada se requieren 3 o más restricciones activas en el punto correspondiente.

Las soluciones basicas factibles serían (1,1), (1,2) y (2,1), de las cuales las últimas 2 son degeneradas.

(1,1) Activa  $x_1 \geq 1$  y  $x_2 \geq 1$

(1,2) Activa  $x_1 \geq 1$ ,  $x_1 + x_2 \leq 3$  y  $x_2 \leq 2$

(2,1) Activa  $x_2 \geq 1$ ,  $x_1 + x_2 \leq 3$  y  $x_1 \leq 2$

- b) Considere el poliedro

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{lll} -3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2 & x_2 + x_3 \leq 1 & x_3 \geq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2 & x_3 \leq 1 & \end{array} \right\}$$

Encuentre todas las SBF de  $P$  (son cuatro) y justifique porque son SBF. *Pista: considere los casos  $x_3 = 0$ ,  $x_3 \in (0, 1)$  y  $x_3 = 1$ .*

**Respuesta:**

Nos ponemos en los casos indicados en las instrucciones

1) caso  $x_3 = 0$ , se necesita activar 2 restricciones más:

- activo  $x_2 + x_3 \leq 1 \rightarrow x_2 = 1$  Me estaría faltando 1 restricción más
  - activo  $-3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$  reemplazando los valores anteriores se obtiene la SBF (1,1,0)
  - activo  $3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$  reemplazando los valores anteriores se obtiene la SBF (-1,1,0)
- activo  $-3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$  y  $3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$  Reemplazando y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene  $x_1 = 0$  y por lo tanto se obtiene la SBF (0, -2, 0)

2) caso  $0 < x_3 < 1$ . No se puede activar ni  $x_3 \geq 0$  ni  $x_3 \leq 1$ . Se activa las 3 restricciones restantes y se resuelve el sistema. Se obtiene el punto (0,0,1), lo que implica que se estaría activando  $x_3 \leq 1$ .

3) caso  $x_3 = 1$ , faltan 2 restricciones por activarse.

- activo  $x_2 + x_3 \leq 1 \rightarrow x_2 = 0$ 
  - activo  $-3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$  Se obtiene el punto (0,0,1)
  - activo  $3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$  Se obtiene el punto (0,0,1)
- Activo  $-3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$  y  $3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2$ , obteniéndose el punto (0,0,1)

finalmente las soluciones básicas factibles son (0,0,1), (0,-2,0), (1,1,0) y (-1,1,0) Las cuales todas cumplen las restricciones y activan 3 o más de estas.

c) Dado el poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i, i = 1 \dots m\}$  considere el siguiente poliedro

$$Q = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a_i^T x - \theta b_i \leq 0, i = 1 \dots m, \theta \geq 0\}$$

Sea  $\bar{x}$  punto extremo de  $P$ . Muestre que  $(\bar{x}, 1)$  no es punto extremo de  $Q$ .

**Respuesta:**

Hay 2 o más caminos distintos para esta pregunta

a) Camino SBF:

Se debe considerar que  $\text{SBF} \leftrightarrow \text{Vertice} \leftrightarrow \text{Punto extremo}$ . Entonces Se puede apreciar que  $(\bar{x})$  activa  $N$  restricciones en  $P$ , pero  $(\bar{x}, 1)$  no activa  $N+1$  restricciones en  $Q$ , por lo tanto no es SBF de  $Q \rightarrow$  No es punto extremo de  $Q$ .

b) Camino Punto Extremo: Se debe considerar que  $(\bar{x}, 1)$  no sea punto extremo de  $Q$  implica que existen 2 puntos  $y$  y  $z$  en  $Q$  talque  $\lambda y + (1 - \lambda)z = (\bar{x}, 1)$ . Basta con considerar  $y = (0, 0)$  y  $z = (\bar{x}, 2)$ , dado que, si hacemos la combinación convexa con  $\lambda = 0,5$ , se obtiene el punto  $(\bar{x}, 1)$ . Lo que implica que no es punto extremo.

### 3. Simplex

Considere el siguiente programa lineal.

$$\begin{array}{rcll}
 \text{mín} & & -3x_2 & -2x_3 & +x_4 & & & & \\
 \text{s.a.} & x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +2x_4 & & -3x_6 & & = 5 \\
 (PL) & & +x_2 & -2x_3 & +4x_4 & +x_5 & -2x_6 & & = 7 \\
 & & +x_2 & & -3x_4 & & -3x_6 & +x_7 & = 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & x_5, & x_6, & x_7 & \geq 0
 \end{array}$$

a) Encuentre una solución básica factible  $x$  que corresponde a la base  $B = (1, 5, 7)$ . **Respuesta:**

Considerando  $x_1, x_5, x_7$  como variables básicas, se procede a hacer el resto igual a 0 al ser un problema

de forma standard, y se obtiene el punto  $(5,0,0,0,7,0,3)$ . Se puede obtener tanto reemplazando o utilizando  $A_b^{-1} * b = x_b$ . Para cada variable no-básica  $x_j$ , calcule el costo reducido  $\bar{c}_j$ . Argumente si se puede concluir que  $x$  es óptimo. **Respuesta:**

Se puede notar que los costos asociados a las variables básicas es un vector de puros ceros, por lo tanto el vector de costos reducidos  $\bar{C}$  sería los costos de las variables no básicas  $(-3,-2,1,0)$ , y como no es positivo, no es el óptimo.

- b) Recuerde que para cada variable no-básica  $x_j$ , hay una dirección factible  $d^j$ . ¿Para cuales de las variables no-básicas  $x_j$  el valor de la función objetivo

- 1) mejora,
- 2) empeora,
- 3) no cambia,

si uno va desde  $x$  hacia  $d^j$ , es decir, desde  $x$  a un punto  $x + \theta d^j$  para un  $\theta > 0$ ? Justifique.

**Respuesta:**

- 1) mejora para  $x_2$  y  $x_3$
- 2) empeora para  $x_4$
- 3) no cambia para  $x_6$

Esto sucede pues los costos reducidos representan la cantidad que va a variar la función objetivo si nos movemos de  $x$  a  $x + \theta d^j$ , se decir, si vale la pena o no hacer que una variable no básica se vuelva distinta de 0. El valor la pena hace referencia a que si el costo reducido es negativo y buscamos minimizar una función, entonces al hacer la variable no básica asociada a ese costo reducido negativo distinta de 0, se estaría agregando ese costo a la función objetivo por unidad. Seleccione una variable  $x_j$  tal que  $\bar{c}_j < 0$ . Encuentre el valor máximo  $\theta \geq 0$  tal que  $x + \theta d^j =: y$  es un punto factible para (PL). Escriba una base  $B'$  que corresponde a  $y$ .

**Respuesta:**

Se pueden elegir tanto  $x_2$  como  $x_3$ . Se hará el desarrollo para  $x_2$ . Notar que  $A_b = A_b^{-1} = I$  y que el punto es  $x = (5, 0, 0, 0, 7, 0, 3)$

- Se elige  $x_2$  para entrar a la base. Se calcula la dirección asociada a que la variable no básica entre a la base  $d_j = -A_b^{-1} * A_j = -(-2, 1, 1) = (2, -1, -1) = (d_1, d_5, d_7)$ . Finalmente el vector  $d$  es  $(2, 1, 0, 0, -1, 0, -1)$ . Este se obtiene pues el  $d_j = d_b$  es el vector que nos muestra como van a variar las variables básicas y  $d_n = (0, \dots, 1_j, \dots, 0)$  donde ese 1 es en la coordenada de la variable no básica que entrará a la base. Se procede a calcular  $x + \theta d \geq 0$ , es decir

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & +\theta d_1 & \geq 0 & 5 & +2\theta & \geq 0 \\
 x_2 & +\theta d_2 & \geq 0 & 0 & +\theta & \geq 0 \\
 x_3 & +\theta d_3 & \geq 0 & 0 & +0 & \geq 0 \\
 x_4 & +\theta d_4 & \geq 0 & \rightarrow & 0 & +0 & \geq 0 \\
 x_5 & +\theta d_5 & \geq 0 & 7 & -\theta & \geq 0 \\
 x_6 & +\theta d_6 & \geq 0 & 0 & +0 & \geq 0 \\
 x_7 & +\theta d_7 & \geq 0 & 3 & -\theta & \geq 0
 \end{array}$$

Finalmente se obtiene que el  $\theta$  más chico que rompe la desigualdad es  $\theta = 3$  finalmente, reemplazamos y se calcula  $x + 3d$  obteniendo el punto  $(11, 3, 0, 0, 4, 0, 0)$ , lo que implica que  $x_7$  salió de la base y que la base del punto finalmente es  $B = [1, 2, 5]$



Sea  $P$  el conjunto de los puntos factibles de  $(PL)$ . Demuestre si  $P$  contiene una línea o no. **Respuesta:**

Como el poliedro tiene una SBF, se puede asegurar, utilizando el teorema de que **si un poliedro que pertenece a  $\mathbb{R}^n$  contiene una línea, entonces no hay  $N$  restricciones L.I que se puedan activar en este, y por lo tanto, no tiene una SBF.**, de que el poliedro no tiene una línea, ya que se puede utilizar la negación del teorema. enumérate

## Reglas del Juego

- Puede usar todo el material del curso para resolver el control (por ejemplo todos los apuntes, videos, y libros que son relevantes por el curso).
- Como siempre en los controles, durante el control no es permitido de comunicar con otra gente, ni sobre las preguntas del control ni sobre el contenido del curso en general.
- El control es diseñado para que pueden resolverlo en 2 horas en circunstancias normales (por ejemplo en una pieza tranquila). Puede ser que por el tema de su situación particular en su casa, necesitan mas tiempo.
- Puede subir sus respuestas en PDF escrito en mano (se aconseja utilizar la aplicación CamScanner o similares para esta última opción).
- Mucha suerte!