Pauta Control 1

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

1. Un jugador de emboque amateur va a participar en un Torneo de Emboque Amateur del barrio. Para ello compró con anticipación 5 emboques aparentemente idénticos y los usó por varios meses hasta que escogió aquél con mejores resultados. Así con el emboque "regalón" la probabilidad de acierto de cualquier lanzamiento es 3/4, en cambio para los restantes cuatro emboques esta probabilidad es sólo 1/3. El día del campeonato vió con estupor que la noche anterior había guardado el emboque regalón junto con los otros emboques, por lo que no era campaz de distinguirlos. Desesperado y atrasado, escoge uno de ellos al azar y se va al campeonato.

   i . Si para ganar el campeonato necesita hacer al menos 8 haciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que gane el campeonato?

   Solución. Supongamos que **fijamos** el emboque elegido. Como cada intento del emboque es independiente y posee la misma probabilidad de acierto, digamos p, entonces acertar al menos 8 intentos de 10, corresponde a la suma de una variable $binomial(10, p)$ para los valores 8, 9 y 10. Es decir:

$$\mathbb{P}(\{\text{ganar}\}|\{\text{fijo un emboque}\}) = \sum_{i=8}^{10} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i}.$$

   La probabilidad anterior está condicionada al emboque escogido, si elegimos el emboque "regalón" entonces $p_1 = 3/4$, si no elegimos al emboque "regalón", entonces $p_2 = 1/3$.

   Dividiremos el evento $X =$"ganar", en los eventos: $Y =$"Sacar el emboque regalón" y $Y^c =$"no sacar el emboque regalón". Sabemos que el total de emboques es 5, y que en la mañana sacó uno al azar, por lo tanto la probabilidad de haber sacar el emboque regalón es de 1/5. Así mismo, la probabilidad de no haberlo sacado es de 4/5. Es decir;

$$\mathbb{P}(Y) = 1/5, \quad \mathbb{P}(Y^c) = 4/5.$$

Aplicando probabilidades totales podemos ver que

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \mathbb{P}(\text{ganar}|Y)\mathbb{P}(Y) + \mathbb{P}(\text{ganar}|Y^c)\mathbb{P}(Y^c)$$

$$= \left(\sum_{i=8}^{10}\binom{10}{i}p_1^i(1-p_1)^{10-i}\right)\times\frac{1}{5}+\left(\sum_{i=8}^{10}\binom{10}{i}p_2^i(1-p_2)^{10-i}\right)\times\frac{4}{5}$$

Donde $p_1 = 3/4$ y $p_2 = 1/3$ por lo explicado anteriormente.

ii Si gana obteniendo 9 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente escogido su emboque regalón?

Solución. Definamos las variables aleatorias: N como el número de aciertos en el campeonato, Y el emboque escogido es el regalón. Nos piden calcular la siguiente probabilidad:

$$\mathbb{P}(Y|N=9)$$

que se traduce a "la probabilidad de haber sacado el regalón dado que acertó 9 lanzamientos". Para encontrar esta probabilidad usaremos el teorema de Bayes, el cual nos dice que

$$\mathbb{P}(Y|N=9) = \frac{\mathbb{P}(N=9|Y)\mathbb{P}(Y)}{\mathbb{P}(N=9)}.$$

De la parte anterior concluímos que $\mathbb{P}(Y) = 1/5$ y que la variable N depende de la elección del emboque, aplicando probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(N=9) = \mathbb{P}(N=9|Y)\mathbb{P}(Y)+\mathbb{P}(N=9|Y^c)\mathbb{P}(Y^c) = \frac{1}{5}\times\binom{10}{9}p_1^9(1-p_1)+\frac{4}{5}\times\binom{10}{9}p_2^9(1-p_2)$$

donde $p_1 = 3/4$ y $p_2 = 1/3$, con lo que el resultado total es:

$$\mathbb{P}(N=9) = \frac{10}{5}\cdot(3/4)^9\cdot(1/4)+\frac{40}{5}\cdot(1/3)^9\cdot(2/3)$$

Notamos que la distribución de N está calculada en cualquier caso de emboque, con o sin el regalón. Sin embargo, si todo el campeonato se hace con el emboque regalón, sabemos que cada acierto ahora se hace con probabilidad $3/4$, por lo tanto **dado que escojo Y,** $N \sim \textit{binomial}(10, \bar{p})$, donde ahora $\bar{p} = 3/4$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(N=9|Y) = \binom{10}{9}\bar{p}^9(1-\bar{p}) = 10\cdot(3/4)^9\cdot(1/4)$$

Juntando todo esto tenemos que,

$$\mathbb{P}(Y|N=9) = \frac{\mathbb{P}(N=9|Y)\mathbb{P}(Y)}{\mathbb{P}(N=9)} = \frac{10\cdot(3/4)^9\cdot(1/4)\ \cdot\ (1/5)}{(10/5)\cdot(3/4)^9\cdot(1/4)+(40/5)\cdot(1/3)^9\cdot(2/3)}$$

2. En un colegio, un profesor asignará actividades al azar para 32 niños. Diez niños jugarán ping pong contra otros 10 (en diez mesas) y seis jugarán volleyball contra otros seis. Si Juana y Pepe están en el curso, calcule la probabilidad de que

   a Juana y Pepe jueguen ping-pong uno contra otro.

   Solución. Fijemos la mesa (mesa 1), y calculemos la probabilidad de que Juana y Pepe jueguen ping-pong en la mesa 1. Si ellos están ocupando la mesa 1, contemos de cuantas formas los demás estudiantes pueden jugar ping-pong o Volleyball. Primero, en total nos quedan 30 estudiantes, de ellos 12 van a volleyball (o 18 van a ping pong, el resultado es el mismo), esto se puede elegir de

$$\binom{30}{12} = \binom{30}{18}, \quad \text{formas.}$$

   Luego, para formar todas las parejas notemos que el primero de los 18 alumnos tiene $(18-1)$ opciones de pareja (todos menos él mismo), luego el siguiente tiene $(18-3)$ opciones para formar pareja (él mismo menos la pareja anterior), y así sucesitamente $(18-5)$, $(18-7)$, ... , el resultado será la multiplicación de todos los números impares entre 1 y 18, esto lo podemos calcular con 18! dividido en todos los pares, es decir;

$$\frac{18!}{\prod_{i=1}^{9} 2i} = \frac{18!}{2^9 \prod_{i=1}^{9} i} = \frac{18!}{2^9\, 9!}.$$

   Luego, cada uno de estas parejas las ordenamos en las 9 mesas que están disponibles (permutación de mesas). Así, tenemos

$$9! \times \frac{18!}{2^9\, 9!} = \frac{18!}{2^9}$$

   formas de obtener 9 partidas de ping-pong. Por otro lado, para asignar los equipos de volleyball sólamente debo buscar **un solo equipo**, pues con el resto se formará el equipo contrincante. Esto se hace con la combinatoria de 12 entre 6. En este caso no ocupamos la permutación, puesto que ya sabemos que un equipo se enfrenta al otro siempre en una sola cancha. Así, las formas de hacer el partido de volleyball son

$$\binom{12}{6}.$$

   Así, para que Juana y Pepe estén en la mesa 1, las formas de ordenar quienes juegan cada deporte, y las formas en que entre ellos pueden jugar son:

$$\binom{30}{12} \times \frac{18!}{2^9} \times \binom{12}{6}$$

   Donde ocupamos la ley de la multiplicación para dividir las elecciones en eventos separados y luego multiplicar. Ahora, como el evento en que Juana y Pepe están en la mesa 1 es disjunto al evento de estar en la mesa 2 o 3 o 4... sólamente multiplicamos por 10 para obtener las formas totales en las que ellos se encuentran jugando ping-pong:

$$10 \times \binom{30}{12} \times \frac{18!}{2^9} \times \binom{12}{6}.$$

Luego, para obtener las configuraciones totales de partidos realizamos el mismo razonamiento, con la diferencia de que ahora el total de alumnos es 32, el total de jugadores de ping pong son 20 y el total de mesas es de 10:

$$\binom{32}{12} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{12}{6}$$

Así, la probabilidad estará dada por (casos favorables / casos totales):

$$\mathbb{P}(\text{Juana y Pepe juegan ping pong}) = \frac{10 \times \binom{30}{12} \times \frac{18!}{2^9} \times \binom{12}{6}}{\binom{32}{12} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{12}{6}} = \frac{10 \times 18! \times 2^{10}}{2^9 \times 20!} \times \frac{\binom{30}{12}}{\binom{32}{12}}$$

$$= \frac{1}{19} \times \frac{\binom{30}{12}}{\binom{32}{12}}$$

Notamos que esta probabilidad no depende ni de la mesa en que ellos juegan, ni de la elección de partidos de volleyball.

b Juana y Pepe Juegan Volleyball uno contra otro.

Solución. Contemos las formas en que Juana juega volleyball en contra de Pepe. Sabemos que hay 2 equipos de volleyball, asumamos que Juana está en el equipo 1 (fijo) y Pepe está en el equipo 2 (fijo). Como nos quedan 30 alumnos, elijamos las formas de escoger aquellos que juegan ping-pong (necesitamos 20) y aquellos que faltan para jugar volleyball (necesitamos 10 además de Juana y Pepe). Así, las formas de hacer esta separación son

$$\binom{30}{20} \quad \text{ó} \quad \binom{30}{10} \text{ (son el mismo valor).}$$

Luego, al igual que en la parte anterior, para elegir las formas de elegir los juegos de ping-pong, neccesitmaos hacer grupos de a 2 personas, y ordenarlas en las 10 mesas que hay, por lo que las formas de configurar 10 partidos de ping pong son

$$\frac{20!}{2^{10}}$$

Finalmente, debemos elegir las formas de escoger a los compañeros de equipo de Juana (los que sobren serán los compañeros de Pepe, hacer esto para Pepe en vez de Juana resulta lo mismo). Como cada equipo es de 6 alumnos, y Juana ya está considerada en el equipo, necesitamos elegir los restantes 5 de aquellos 10 alumnos elegidos para jugar volleyball. Esto es exáctamente

$$\binom{10}{5}, \quad \text{formas.}$$

Por lo tanto, las cantidad de formas en que Pepe y Juana juegan (uno contra el otro) volleyball son

$$\binom{30}{20} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{10}{5}$$

(Inicialmente dijimos que Juana estaba en el equipo 1 y Pepe estaba en el equipo 2, pero note que cuando elegimos **todos los posibles equipos para Juana** también se consideraron todos los posibles equipos 2 en que también pudo haber estado.) Así, occupando los casos totales calculados en la parte anterior, la probabilidad de que esto pase es de:

$$\mathbb{P}(\text{Juana contra Pepe en volleyball}) = \frac{\binom{30}{20} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{10}{5}}{\binom{32}{12} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{12}{6}} = \frac{\binom{30}{20} \times \binom{10}{5}}{\binom{32}{12} \times \binom{12}{6}}$$

Notamos que esta probabilidad no depende de las elecciones de partidos de ping-pong.

c Juana y Pepe jueguen volleyball en el mismo equipo.

Solución. Al igual que el caso anterior, si Juana y Pepe juegan volleyball, necesitamos 20 alumnos para que jueguen ping-pong y 10 para completar los equipos de volleyball, por lo tanto separamos el curso entero en ping-pong y volleyball, y eso consta de

$$\binom{30}{20}, \qquad \text{formas.}$$

Además, ya habíamos dicho que hay

$$\frac{20!}{2^{10}}$$

configuraciones para los partidos de ping-pong.

Ahora, como Juana y Pepe están en el mismo equipo, necesitamos elegir a los 4 compañeros extras que conformen el equipo, esto se puede hacer de

$$\binom{10}{4}, \quad \text{formas.}$$

Por lo tanto las formas en que ellos están en el mismo equipo de volleybal son

$$\binom{30}{20} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{10}{4}$$

Así, la probabilidad de que Juana y Pepe jueguen en el mismo equipo de volleyball es de

$$\mathbb{P}(\text{Juana y Pepe en el mismo equipo}) = \frac{\binom{30}{20} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{10}{4}}{\binom{32}{12} \times \frac{20!}{2^{10}} \times \binom{12}{6}} = \frac{\binom{30}{20} \times \binom{10}{4}}{\binom{32}{12} \times \binom{12}{6}}$$

3. Suponga que le llegan de regalo un set de 26 cajas etiquetadas de la A a la Z (considere el elafabeto ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ) y un set de 26 pelotitas etiquetadas de igual forma. Usted no sabe qué hacer con ellas así que decide regalárselas a una niña pequeña. Pero antes, decide conservar las cajas etiquetadas con letras de su primer nombre y primer apellido (por ejemplo Jorge Perez Acuña conservaría las cajas JORGEPZ) y decide conservar las pelotitas con letras de su primer apellido y segundo apellido (en el ejemplo Jorge Perea Acuña conservaría las pelotitas PEREZACUN). La niña se pone a jugar con las cajas y pelotitas que usted le regaló (es decir, las que NO conservó) y coloca aleatoriamente una pelotita en cada cada hasta que las pelotitas se acaben o hasta que todas las cadas estén completas (pueden sobrar ccajas o pelotitas de acuerdo al número de ellas que obtenga). Sea X el número de pelotitas que caen exáctamente en la caja con la misma etiqueta.

a Determine el conjunto de pelotas y cajas en su caso y calcule el número de letras en común.

Solución. Partiré ejemplificando con mi caso particular y luego lo extrapolaremos a cualquier normbre.

Nombre: Bruno Hernández Pereira. Cajas mias: ABDEHNORUZ. Pelotitas mias: ADEHINPRZ. Así, el conjunto de cajas y pelotitas serían todo el alfabeto menos estas (un alfabeto para las cajas y un alfabeto para las pelotitas). Notemos que el conjunto de pelotas terminó siento más grande que el conjunto de cajas (caso particular).

De mis propias cajas y pelotitas podemos ver que hay letras que se repiten, estas son ADEHNRZ, a este conjunto de letras las llamaré $\mathcal{R}$ (letras "repetidas"). Entonces si $\mathcal{C}$ son las letras en mi caja, y $\mathcal{P}$ son las letras en mis pelotitas tengo que:

$$\mathcal{R} = \{ADEHNRZ\},\ \ \mathcal{C}\backslash\mathcal{R} = \{BOU\},\ \ \mathcal{P}\backslash\mathcal{R} = \{IP\}$$

Luego, a la niña le entrego el conjunto de cajas $\mathcal{C}^C$ y el conjunto de pelotitas $\mathcal{P}^C$.

b Determine R_X.

Solución. Como para todas las 7 letras en $\mathcal{R}$ tengo su caja y su pelotita, no debo preocuparme en que les salga una de estas a la niña, por lo tanto consideraré todo el tiempo que trabajamos con $26 - 7 = 19$ letras en total. De las 19 letras, le entregué $19 - 3 = 16$ cajas y $19 - 2 = 17$ pelotitas. De todas esas pelotas y cajas, yo sé que en 5 casos las pelotitas nunca coincidirán con su caja, estos casos son cuando saque alguna pelota con las etiquetas en $\mathcal{C}\backslash\mathcal{R}$ o coloque algo en alguna de las cajas con las etiquetas en $\mathcal{P}\backslash\mathcal{R}$ (esto básicamente porque yo tengo la pelota o caja respectiva, nunca encontrará el match). Así, la máxima cantidad que puede tomar la variable X, en este caso es de $19 - 5 = 14$, es decir que $R_X = \{0, \cdots, 14\}$.

c Calcule la distribución de prob. de X

Solución. Notemos que como la niña pone las pelotitas en cada caja de una en una, la probabilidad es fuertemente dependiente del orden de las cajas (piense que un match en la segunda caja depende de lo que haya sucedido en la primera, y un match en la tercera depende de lo que haya pasado en la primera y segunda, etc). Primero definiremos los eventos E_i^1, con $i = [16]\backslash\{i_I, i_P\}$ que representará el evento en que la caja en la posición i tiene un match (independiente de lo que pase en las otras); e i_I, i_P representan la posición de las cajas con letras I y P. Luego

$$P(E_i^1) = \frac{16 \cdot 15 \cdot ... \cdot 2}{17 \cdot 16 \cdot ... \cdot 2} = \frac{16!}{17!}$$

que corresponde a fijar que la caja i tenga un match, y las demás pueden tener cualquier pelota. Ahora, como esta caja se puede elegir de 14 maneras, tenemos que:

$$\sum_{i\in[16]\backslash\{i_I,i_P\}} P(E_i^1) = 14/17$$

De manera análoga, definimos el evento $E_{i,j}^2$, con $i \neq j$ como el evento en que la caja i y la caja j tienen un match. Con un razonamiento análogo al anterior:

$$P(E_{i,j}^2) = \frac{15!}{17!}$$

Como para elegir las parejas tengo $\binom{14}{2}$ formas:

$$\sum_{i,j\in[16]\backslash\{i_I,i_P\};i\neq j} P(E_{i,j}^2) = \binom{14}{2}\frac{15!}{17!} = \frac{14!15!}{2!12!17!}$$

Generalizamos, de forma que para $k \leq 14$:

$$P(E^k_{i_1 \dots i_k}) = \frac{(17-k)!}{17!}$$

Y entonces:

$$\sum_{i_1 \dots i_k \in [16] \setminus \{i_I, i_P\} \ distintos} P(E^k_{i_1 \dots i_k}) = \frac{14!(17-k)!}{(14-k)!17!} \frac{1}{k!}$$

Con todo esto, podemos definir el evento

$$X_k := \{X \geq k\} = \{ \bigcup_{i_1 \dots i_k \in [16] \setminus \{i_I, i_P\} \ distintos} E^k_{i_1 \dots i_k} \}$$

Esta unión no es disjunta, y notando que $E^1_i \cap E^1_j = E^2_{i,j}$ y generalizando:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i_1 \dots i_k \in [16] \setminus \{i_I, i_P\}} E^k_{i_1 \dots i_k}) &= \sum_{i_1 \dots i_k \in [16] \setminus \{i_I, i_P\}} P(E^k_{i_1 \dots i_k}) - \sum_{i_1 \dots i_{k+1} \in [16] \setminus \{i_I, i_P\}} P(E^{k+1}_{i_1 \dots i_{k+1}}) + \dots \\ &= \frac{14!(17-k)!}{(14-k)!17!k!} - \frac{14!(17-(k+1))!}{(14-(k+1))!17!(k+1)!} + \frac{14!(17-(k+2))!}{(14-(k+2))!17!(k+2)!} - \dots \\ &= \sum_{l=k}^{14} \frac{14!(17-l)!}{(14-l)!17! \cdot l!} (-1)^{l+k} \end{aligned}$$

Finalmente, podemos ver que:

$$\begin{aligned} P(X=k) = P(\{X \geq k\} \setminus \{X \geq k+1\}) &= P(X_k) - P(X_{k+1}) \\ &= \sum_{l=k}^{14} \frac{14!(17-l)!}{(14-l)!17! \cdot l!} (-1)^{l+k} - \sum_{l=k+1}^{14} \frac{14!(17-l)!}{(14-l)!17! \cdot l!} (-1)^{l+k+1} \\ &= \sum_{l=k}^{14} \frac{14!(17-l)!}{(14-l)!17! \cdot l!} (-1)^{l+k} + \sum_{l=k+1}^{14} \frac{14!(17-l)!}{(14-l)!17! \cdot l!} (-1)^{l+k} \\ &= \frac{14!(17-k)!}{(14-k)!17! \cdot k!} (-1)^{2k} + 2 \sum_{l=k+1}^{14} \frac{14!(17-l)!}{(14-l)!17! \cdot l!} (-1)^{l+k} \end{aligned}$$

A excepción la probabilidad en el caso límite $k = 14$ es:

$$P(X=14) = P(X \geq 14) = \frac{14!(17-14)!}{(14-14)!17! \cdot 14!} = \frac{3!}{17!}$$

Esto último se puede razonar independientemente de todo lo anterior. Lo que queremos es imponer que todas aquellas cajas que **puedan tener un match, lo tengan.** En este caso, imponemos 14 matches, lo que nos deja 2 cajas libres y 3 pelotas sin usar, entonces simplemente calculamos las formas de poner estas 3 pelotas en 2 cajas ($\frac{3!}{(3-2)!}$). Para casos totales, calculamos las formas de poner 17 pelotas en 16 cajas ($\frac{17!}{(17-16)!}$).

Nota: Resolvimos este problema para el caso particular en que la cantidad de pelotas (P) fuera 17, la cantidad de cajas (C) fuera 16 y el valor máximo de R_X (K) fuera 14. Para generalizar, basta realizar desarrollos análogos **reemplazando los números '16' por C,**

los números ’17’ por P y los números ’14’ por K. Incluso podemos intercambiar los roles de P y C si es que C $>$ P.

4. En un empresa se desea testear si sus empleados tienen una enfermedad infecciosa aunque estén asintomáticos. Para ellos tienen una cantidad limitada de test, por lo que han decido hacer la siguiente estrategia de test grupal: Se harán diez personas y se tomarán para cada grupo un sólo test a una muestra de sangre mezclada de las diez personas. el test puede detectar pequeñas cantidades del virus, por lo que si **hay una o más personas contagiadas el test resultará positivo con probabilidad 0.7. En cambio, si nadie está contagiado, la probabilidad de que salga negativo es 0.9. Suponga que la probabilidad que una persona esté contagiado es independiente del resto y es igual a** p.

   a Calcule la probabilidad que el test de positivo para un grupo de 10 personas.

   Solución. Llamemos N a la cantidad de contagiados en un grupo de 10 personas. Como cada persona se contagia con la misma probabilidad p y de manera independiente, podemos decir que $N \sim binomial(10, p)$. Llamemos como X al evento ”el test da positivo”.

   Sabemos que si $N = 0$ entonces la probabilidad de X es de 0.1 (pues da negativo con probabilidad 0.9), es decir:

$$\mathbb{P}(X|N = 0) = 0{,}1.$$

   Así mismo, si $N = 1, \cdots, 10$ (alguien está contagiado) la probabilidad de X es de 0.7,

$$\mathbb{P}(X|N \in \{1, \cdots, 10\}) = 0{,}7.$$

   Además, podemos notar que decir que $N \in \{1, \cdots, 10\}$, es lo mismo que decir que $N \neq 0$, por lo tanto tenemos que:

$$\mathbb{P}(N = 0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = (1-p)^{10}, \quad \text{y}$$

$$\mathbb{P}(N \in \{1, \cdots, 10\}) = \mathbb{P}(N \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(N = 0) = 1 - (1-p)^{10}$$

   De esta forma, utilizando el teorema de probabilidades totales:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(X|N = 0)\mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(X|N \neq 0)\mathbb{P}(N \neq 0) \\ &= 0{,}1\,(1-p)^{10} + 0{,}7\,(1 - (1-p)^{10}) \\ &= 0{,}7 - 0{,}6\,(1-p)^{10} \end{aligned}$$

   b Calcule la probabilidad de que haya **al menos** un contagiado en el grupo dado que el test grupal dio positivo.

   Solución. Notamos que nos piden sacar la siguiente probabilidad:

$$\mathbb{P}(N \geq 1|X).$$

   Para este cálculo ocuparemos el lema de Bayes, el que nos otorga la siguiente igualdad

$$\mathbb{P}(N \geq 1|X) = \frac{\mathbb{P}(X|N \geq 1)\mathbb{P}(N \geq 1)}{\mathbb{P}(X)}.$$

Vemos que $N \geq 1 \Leftrightarrow N \in \{1, \cdots, 10\} \Leftrightarrow N \neq 0$, por lo tanto:

$$\mathbb{P}(N \geq 1|X) = \frac{\mathbb{P}(X|N \geq 1)\mathbb{P}(N \geq 1)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\mathbb{P}(X|N \neq 0)\mathbb{P}(N \neq 0)}{\mathbb{P}(X)}$$

$$= \frac{0{,}7\,(1-(1-p)^{10})}{0{,}7 - 0{,}6\,(1-p)^{10}}.$$

c Calcule la probabilidad que Juan, que pertenece al grupo que dio positivo, esté contagiado.
Solución. Denotemos como J al evento "Juán está contagiado", y supongamos Juan pertenece al conjunto que dio positivo en el evento X (ver parte a). Así, la probabilidad requerida es:

$$\mathbb{P}(J|X).$$

Nuevamente podemos ocupar el lema de Bayes para ver que

$$\mathbb{P}(J|X) = \frac{\mathbb{P}(X|J)\mathbb{P}(J)}{\mathbb{P}(X)}.$$

Como sabemos que los contagios de cada persona son independientes, tenemos que $\mathbb{P}(J) = p$. Por último, si asumimos que Juan está contagiado y al test le es indiferente la cantidad de contagiados mientras haya uno, entonces en particular $N \geq 1$, por lo tanto $\mathbb{P}(X|J) = \mathbb{P}(X|N \geq 1) = 0{,}7$. Así,

$$\mathbb{P}(J|X) = \frac{\mathbb{P}(X|J)\mathbb{P}(J)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{0{,}7\,p}{0{,}7 - 0{,}6\,(1-p)^{10}}.$$