Auxiliar 2

Variables aleatorias, Esperanza y Varianza.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

1. Una *variable aleatoria* (v.a.) es una **función** que toma valores reales y su dominio es un espacio muestral.

   Ejemplo: X es el resultado de un lanzamiento de un dado, entonces, escribiéndola como función:

   $$X : \Omega \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   pues esos son los valores que puede tomar la variable X (los valores del dado). En vez de enfocarnos en qué es lo que es el conjunto Ω, nos enfocaremos en de qué maneras la variable aleatoria X toma los valores de llegada.

2. Una variable aleatoria es **discreta**, si sólo puede tomar un número finito o infinito numerable de valores distintos. Es decir, su *recorrido* (desde ahora anotado como R_X) es un conjunto finito o infinito numerable.

3. La probabilidad de que la variable X tome el valor x, $\mathbb{P}(X = x)$, es la suma de las probabilidades de todos los puntos del espacio muestral a los que se le asigna el valor x.
   Propiedades:

   - $0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq 1$, para todo $x \in R_X$
   - $\sum_{x \in R_X} \mathbb{P}(X = x) = 1$
   - Para todo subconjunto M:

     $$\mathbb{P}(X \in M) = \sum_{x \in M \cap R_X} \mathbb{P}(X = x)$$

4. **Definición:** Sea X una variable aleatoria discrete con función de probabilidad $P_X(x)$ ($\mathbb{P}(X = x)$). Entonces el valor esperado de X, o *Esperanza* de X, $\mathbb{E}(X)$, se define como:

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x\, P_X(x)$$

   Si $g(X)$ es una función de la variable aleatoria X, entonces podemos definir $\mathbb{E}[g(X)]$, de la siguiente forma:

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in R_X} g(x)\, P_X(x)$$

   (Notemos que **No** aplicamos la función al interior de la probabilidad)

5. **Definición:** Si X es una v.a. con esperanza $\mathbb{E}(X) = \mu$. Se define la *Varianza* de X, como el valor esperado de la función $(X - \mu)^2$:

   $$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mu)^2\right)$$

1 Problemas

P1. Muestre las siguientes propiedades:

- $\mathbb{E}(c) = c$, para todo c valor constante.
- La Esperanza es lineal, es decir: con a y b constantes, X e Y v.a.'s:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

- **Proposición:** La descomposición de la variaza.

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Para cualquer v.a. X.

P2. Sea X una variable aleatoria discreta no negativa, con $R_X = \{0, 1, 2, \cdots\}$, es decir $X \geq 0$, tal que $\mathbb{E}(X) = 0$. Demuestre que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

P3. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas que en todo momento $X \leq Y$. Entonces

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

P4. Sea $p \in (0, 1)$, decimos que X es una v.a. *Geométrica* de parámetro p (y lo anotamos $X \sim$ *Geométrica*(p)) si:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

donde $k \in R_X = \mathbb{N}$.

- Verifique que lo anterior realmente es una probabilidad. Es decir

$$0 \leq \mathbb{P}(X = k) \leq 1$$

$\forall\, k \in R_X$. Y además que:

$$\sum_{k \in R_X} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

- Calcule $\mathbb{E}(X)$
- Calcule $Var(X)$

P5. Supongamos que estamos jugando un partido de tenis. Estamos en *deuce* (iguales), lo que significa que de las dos siguientes pelotas jugadas, existen 3 resultados: Si tú ganas ambas pelotas, ganas el juego. Si yo gano ambas pelotas, yo gano el juego. Si cada uno de nosotros gana una pelota (no importa el orden), volvemos a *deuce*.

Definamos los siguientes 3 eventos:

a) W: "Tú ganas el juego".

b) G: "El juego termina luego de las siguientes 2 pelotas jugadas".

c) D: "Se vuelve a *deuce* denuevo".

Si el resultado de cada pelota jugada es independiente, y tú ganas una de ellas con probabilidad p:

- Determine $\mathbb{P}(W|G)$.
- Muestre que $\mathbb{P}(W) = p^2 + 2p(1-p)\mathbb{P}(W|D)$. Explique, ¿por qué $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W|D)$? y úselo para calcular $\mathbb{P}(W)$.
- Compare las dos respuestas anteriores. Explique qué pasa.

Soluciones:

P1. *a)* Sea X una variable aleatoria discreta. Propongamos la siguiente función $g(X) = c$, la función constante. Entonces:

$$\mathbb{E}(c) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in R_X} g(x)P_X(x) = \sum_{x\in R_X} cP_X(x) = c\sum_{x\in R_X} P_X(x)$$

Recordemos que $P_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, es la función de probabilidades, que cumple lo siguiente:

$$\sum_{x\in R_X} P_X(x) = 1$$

Por lo tanto, concluímos que

$$\mathbb{E}(c) = c$$

b) Sean X e Y v.a.'s, Primero veamos que:

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Calculemos:

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x+y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} x\mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} y\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x\in R_X} x\sum_{y\in R_Y}\mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{y\in R_Y} y\sum_{x\in R_X}\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

Recordemos el teorema de probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in R_Y}\mathbb{P}(X=x|Y=y)\mathbb{P}(Y=y)$$

Pero como $\mathbb{P}(X = x|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, entonces:

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in R_Y} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior, y haciendo el caso análogo para Y:

$$\begin{aligned} &= \sum_{x \in R_X} x \sum_{y \in R_Y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) + \sum_{y \in R_Y} y \sum_{x \in R_X} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in R_X} x\mathbb{P}(X = x) + \sum_{y \in R_Y} y\mathbb{P}(Y = y) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Finalmente, defino las nuevas variables aleatorias: $Z = g(X) = aX$ y $W = h(Y) = bY$, como funciones de las variables aleatorias anteriores. Y tenemos:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = \mathbb{E}(Z + W) = \mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(aX) + \mathbb{E}(bY)$$

$$= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

c) Sea X una variable aleatoria, con $\mathbb{E}(X) = \mu$:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mu)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2\mu X) + \mathbb{E}(\mu^2) \end{aligned}$$

Por la linealidad de la esperanza, y sabiendo que μ es constante, tenemos que: $\mathbb{E}(2\mu X) = 2\mu\mathbb{E}(X)$ y además $\mathbb{E}(\mu^2) = \mu^2$. Así:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Donde ocupamos que $\mathbb{E}(X) = \mu$. Finalmente concluímos volviendo a reemplazar lo antes dicho:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

P2.