Auxiliar 2

Probabilidad condicional y teorema de probabilidades totales.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

1. La *Probabilidad Condicional* de un evento **A**, dado que un evento **B** ha ocurrido es igual a:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

siempre que $\mathbb{P}(B) > 0$. El símbolo $\mathbb{P}(A|B)$ se lee *"probabilidad de A, dado B"*.

2. Se dice que dos eventos son **independientes**, si se cumplen cualquiera de los dos siguientes casos:
   - $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
   - $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
   - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ Si esto no sucede diremos que los eventos son **dependientes**.

3. **Teorema:** La probabilidad de intersección de dos elementos es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\\ &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)\end{aligned}$$

4. **Teorema:** La probabilidad de la unión de dos elementos es:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Si A y B son *mutuamente excluyentes*, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ y

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

5. **Teorema:** Si A es un evento, entonces:

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

($A^c = \bar{A}$ es el complemento de A)

6. **Teorema: (Ley de probabilidades totales)** Suponga que $\{B_1, \cdots, B_k\}$ es una partición de S, tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, para $i = 1, \cdots, k$. Entonces para cualquier evento A:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

7. **Teorema: (Regla de Bayes)** Suponga que $\{B_1, \cdots, B_k\}$ es una partición de S, tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, para $i = 1, \cdots, k$. Entonces:

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

De manera más simple, con sólo dos eventos A y B:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

1 Problemas

P1. Supongamos una baraja clásica de naipes ingleses ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, del A hasta el K), de 52 cartas. Sea S_1 el evento "El primero en salir es $\spadesuit$", y S_2 "El segundo en salir es $\spadesuit$".

- Calcule $\mathbb{P}(S_1)$, $\mathbb{P}(S_2|S_1)$ y $\mathbb{P}(S_2|S_1^c)$.
- Calcule $\mathbb{P}(S_2)$ condicionando al resultado de la primera extracción.

P2. Una bola es extraída de manera aleatoria desde una urna que contiene una bola blanca y una bola roja. Si la bola es blanca, entonces se devuelve a la urna. Si la bola es roja, entonces se devuelve a la urna junto a dos bolas rojas adicionales.
Al momento de hacer la segunda extracción, ¿cuál es la probabilidad de que una bola roja haya sido extraída en *ambas* (primera y segunda) extracciones?

P3. El "alcohotest", utilizado por la policía para verificar si los conductores exceden el límite legar del porcentaje de alcohol en la sangre al manejar, es conocido por satisfacer lo siguiente:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = p$$

donde A es el evento "El alcohotest indica que se ha excedido el límite legal", mientras que B corresponde al evento "El porcentaje de alcohol en sangre excede al límite legal" (note que existe una gran diferencia entre estos sucesos).

La noche del sábado, el 5 % de los conductores evaluados, son retenidos por exceder el test.

- Describe en palabras el significado de $\mathbb{P}(B^c|A)$.
- Determine $\mathbb{P}(B^c|A)$, si $p = 0{,}95$.
- ¿Qué tan grande tiene que ser p para que $\mathbb{P}(B|A) = 0{,}9$?

P4. Un estudiante es mandado al frente de su curso de probabilidades y estadísticas, para resolver un problema numérico. Él sabe que la respuesta es alguno de los números enteros entre 1 y k ($\{1, \cdots, k\}$). Resolviendo el problema, el estudiante podría encontrar la forma correcta de razonar o errar en el intento. El nivel de estudio del compañero es tal que puede encontrar la forma correcta de resolver el problema con una probabilidad p. Por lo tanto, tomando el complemento sabemos que la probabilidad de errar en este problema es $1 - p$, en este caso asumiremos que el estudiante podría dar cualquiera de los números entre 1 y k como respuesta, con igual probabilidad ($1/k$).

Si al final, el alumno dice la respuesta, y esta es la correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente haya hecho bien el ejercicio y no lo haya tirado "al achunte"?

P5. Para pensar: Suponga que lanzo 3 monedas. Dos de ellas caen mostrando el mismo resultado, no importa si es cara o sello, la tercera moneda tiene la misma probabilidad de caer igual que el resto o diferente. Entonces la probabilidad de que las tres monedas caigan de la misma forma es igual a 1/2. ¿Cierto o Falso? Explique.