Guía de Ejercicios 1

Problemas de conteo y espacios equiprobables.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

La siguiente guía de ejercicios contiene problemas de conteo o de probabilidades en espacios equiprobables. Esto quiere decir que, de forma muy general, las probabilidades pueden reducirse al conteo de casos favorables y casos totales.

En resumen, las probabilidades serán calculadas (por ahora) de la siguiente manera:

$$\frac{\#\text{ Casos favorables}}{\#\text{ Casos totales}}.$$

Ayudas:

1. Recuerden que los *# Casos totales = # Casos favorables + # Casos No favorables*. En ocasiones es mejor contar aquellos que no son favorables y "descontar" para llegar al resultado.
2. Hay formas predeterminadas de contar casos que ya vimos. Como las siguientes:

   a) Permutaciones: Las formas de ordenar n elementos en n espacios (cada elemento ocupa un espacio distinto), se denota como:

   $$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

   Esto se ocupa cuando contamos formas de ordenar objetos (objetos distinguibles).

   b) Variaciones: Las formas de ordenar n objetos (distinguibles) en m espacios (no todos caben en el orden, $n \geq m$), se calcula de la siguiente forma:

   $$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

   (Recuerde que $0! = 1$. Demuestrelo.)

   c) Combinaciones: Si un conjunto A tiene tamaño n, existen

   $$C^n_m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

   formas de seleccionar m objetos (sin importar el orden). En otras palabras, hay C^n_m subconjuntos de A de tamaño m.

3. Regla de la multiplicación: Sea un experimento del que queremos contar todos los posibles resultados que cumplan alguna propiedad dada. Si los resultados válidos pueden ser organizados de manera que:

   - Se separan los resultados válidos en n clases (una partición de los resultados que cumplen la propiedad),
   - cada clase definida tiene m valores posibles que cumplen la propiedad.

   Entonces el número de resultados diferentes que cumplen la propiedad es $n \times m$.

   Ejemplo: Sea A un conjunto de n elementos, ¿de cuántas formas puedo seleccionar k ($k \leq n$) elementos considerando el orden de extracción?
   Acá podemos separar el problema en 2 partes, la primera es seleccionar los k elementos del conjunto A, sin importar el orden. Eso lo podemos calcular con la combinatoria:

   $$\# \text{ subconjuntos} = \binom{n}{k}$$

   Ahora, sabemos que este subconjunto (de tamaño k) necesita un orden, por lo tanto calculamos las formas de ordenarlos:

   $$\# \text{ ordenes} = k!$$

   Como cada subconjunto que elija tendrá la misma cantidad de 'ordenes', entonces la forma que tenemos para contar lo pedido es la siguiente: elijo el subconjunto, luego le agrego el orden. Así, la regla me dice que basta con multiplicar cada clase por la cantidad de formas de ordenar esas clases:

   $$\# \text{ Subconjuntos} \times \# \text{ ordenes} = \binom{n}{k} \times k!$$

Ejercicios:

1. En el patio de la escuela hay n niños tomados de la mano, ¿de cuántas formas pueden formar un círculo? (El círculo se repite si los niños giran de la mano todos juntos!)

2. con 7 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras se pueden formar que tengan 4 consonantes distintas y 3 vocales distintas?

3. En la síntesis de proteína hay una secuencia de tres nucleótidos sobre el ADN que decide cuál es el aminoácido a incorporar. Existen cuatro tipos distintos de nucleótidos según la base, puede ser A (adenina), G (guanina), C (citocina) y T (timina). ¿Cuántas secuencias distintas se podrán formar si se pueden repetir nucleótidos?

4. Las diagonales de un polígono se obtienen uniendo pares de vértices no adyacentes.

   - Obtener el número de diagonales del cuadrado, el hexágono y el octágono. Calcularlo para el caso general de un polígono de n lados.
   - ¿Existe algún polígono en el que el número de diagonales sea igual al número de lados? (*)

5. Una dulcería ofrece 10 sabores distintos de dulces. Si uno desea comprar una bolsa de 20 dulces (no necesariamente distintos), ¿cuántas posibles bolsas se pueden formar? (*)

6. Encuentre, para $n \in \mathbb{N}$, la cantidad de conjuntos de números enteros entre $-n$ y n (inclusive) que no contienen dos elementos con el mismo valor absoluto. (*)

7. Cuando se lanzan, simultáneamente, 4 monedas,

   - ¿cuántos posibles casos se pueden obtener?
   - ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y 2 cruces?

8. Sea A un conjunto de n elementos, calcule la cantidad total de subconjuntos de A.

   Hint: Le podría servir recordar la fórmula de Newton para los polinomios de grado n. (*)

9. Suponiendo que hay 27 letras distintas, ¿cuántos conjuntos diferentes de iniciales pueden formarse si cada persona tiene sólo un apellido y exáctamente 2 nombres?