Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidad y Estadística MA 3403, 13/07/20, Prof. R. Gouet
Prof. Aux. J. Castro y V. Salinas

Solución Control #2

1. Un resultado clásico de mecánica indica que el alcance de un proyectil lanzado con velocidad inicial v y ángulo θ c/r al plano horizontal es $a(\theta) = \frac{v^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta)$, siendo g la aceleración de gravedad.

   El objetivo de este ejercicio es determinar la distribución de la la variable aleatoria $Y = a(X)$, definida como el alcance de un proyectil con velocidad inicial v (no aleatoria) y ángulo aleatorio X, con distribución uniforme en el intervalo $[0, \pi/2]$.

   a) Calcule $\mathbb{E}(a(X))$ directamente, sin usar la densidad f_Y.
   Sol: Para simplificar, definimos $c = v^2/g$.

   $$\mathbb{E}(a(X)) = \mathbb{E}(c\operatorname{sen}(2X)) = c\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sen}(2x)f_X(x)dx = \frac{2c}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(2x)dx = \frac{2c}{\pi}.$$

   b) Sea $y \in [0,1]$. Muestre que la ecuación $y = \operatorname{sen}(2x)$ tiene soluciones $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(y), \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(y)$, donde $\operatorname{sen}^{-1}(y)$ es la función arcoseno.
   Sol: Sean x_1, x_2 las soluciones propuestas. Comprobamos que son soluciones:

   $$\operatorname{sen}(2x_1) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(y)) = y, \qquad \operatorname{sen}(2x_2) = \operatorname{sen}(\pi - \operatorname{sen}^{-1}(y)) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(y)) = y.$$

   c) Sea $y \in [0, \frac{v^2}{g}]$. Muestre que $\mathbb{P}(Y > y) = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}^{-1}(\frac{yg}{v^2})$ y determine $F_Y(y)$ (la función de distribución de Y), para todo $y \in \mathbb{R}$.
   Sol: Sea $y \in [0, c]$, entonces

   $$\mathbb{P}(Y > y) = \mathbb{P}(\operatorname{sen}(2X) > y/c) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(y/c) < X < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(y/c)\Big)$$

   $$= \int_{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(y/c)}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(y/c)} f_X(x)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}(y/c)\Big) = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}^{-1}(y/c).$$

   Sabemos que $F_Y(y) = 1 - \mathbb{P}(Y > y)$, por lo tanto, para $y \in [0, c]$, tenemos

   $$F_Y(y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}^{-1}(y/c).$$

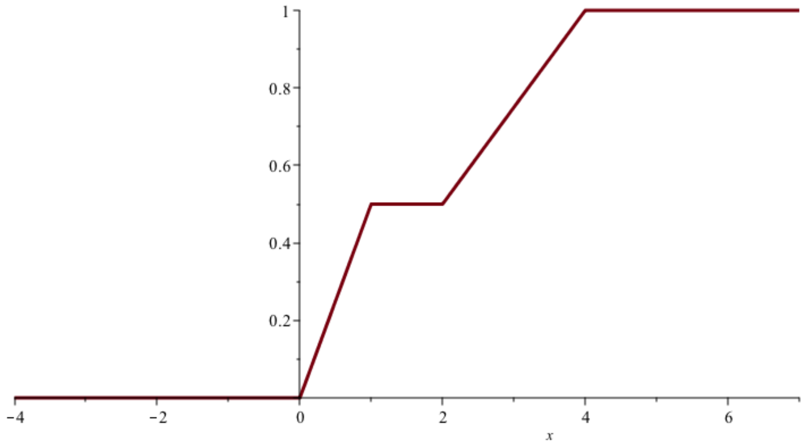
   Para $y > c$ evidentemente $F_Y(y) = 1$; para $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.

   d) Muestre que la densidad de Y es $f_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{\left(\frac{v^2}{g}\right)^2 - y^2}}\mathbf{1}_{[0,\frac{v^2}{g}]}(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

   Sol: La densidad se obtiene derivando F_Y:

   $$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}^{-1}(y/c)\right) = \frac{2}{c\pi\sqrt{1-(y/c)^2}}\mathbf{1}_{[0,c]}(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{c^2-y^2}}\mathbf{1}_{[0,c]}(y).$$

2. Investigaciones de una empresa de ingeniería de transporte muestran que el tiempo de espera en minutos, hasta que pase el metro por una estación (para un pasajero recién llegado al andén), es una variable aleatoria T con función de distribución F_T definida por: $F_T(t) = 0$ para $t \leq 0$; $F_T(t) = t/2$ para $0 \leq t \leq 1$; $F_T(t) = 1/2$ para $1 \leq t \leq 2$; $F_T(t) = t/4$ para $2 \leq t \leq 4$; $F(t) = 1$ para $t \geq 4$.



a) Grafique la función de distribución.

Sol:

b) Determine si F es continua y calcule su densidad de ser posible.

Sol: F es evidentemente continua. Para comprobar analíticamente basta tomar los límites laterales correspondientes. Para obtener la densidad f basta derivar. El resultado se puede escribir con indicadoras, como sigue

$$f(t) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,4]}(t).$$

c) Calcule la probabilidad de que una persona tenga que esperar (a) más de 3 minutos; (b) menos de 3 minutos; (c) entre 1 y 3 minutos.

Sol: (a) $\mathbb{P}(T > 3) = 1 - F(3) = 1 - 3/4 = 1/4$; (b) $\mathbb{P}(T < 3) = \mathbb{P}(T \leq 3) = F(3) = 3/4$; (c) $\mathbb{P}(1 < T < 3) = F(3) - F(1) = 3/4 - 1/2 = 1/4$.

d) Calcule la probabilidad de que la persona espere (a) más de 3 minutos, sabiendo que ya lleva 1 minuto esperando; (b) menos de 3 minutos, dado que lleva 1 minuto esperando.

Sol (a) $\mathbb{P}(T > 3 \,|\, T > 1) = \mathbb{P}(T > 3)/\mathbb{P}(T > 1) = (1/4)/(1 - F(1)) = (1/4)/(1/2) = 1/2$.
(b) $\mathbb{P}(T < 3 \,|\, T > 1) = 1 - \mathbb{P}(T \geq 3 \,|\, T > 1) = 1 - \mathbb{P}(T > 3 \,|\, T > 1) = 1 - 1/2 = 1/2$.

3. Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores en $D = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Se define la tasa de falla de X como la función $r : \mathbb{N} \to [0, 1]$ dada por $r(n) = \mathbb{P}(X = n \,|\, X \geq n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $p \in (0, 1)$. Muestre que $r(n) = p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, si y solo si X tiene ley geométrica de parámetro p.

Sol: Supongamos primero que X es geométrica, entonces $p_X(n) = q^{n-1}p$ y

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} q^{k-1}p = pq^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty} q^{k-n} = q^{n-1}.$$

Por otra parte,

$$r(n) = \mathbb{P}(X = n \,|\, X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X = n, X \geq n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{q^{n-1}p}{q^{n-1}} = p.$$

Ahora demostramos que $r(n) = p$, $\forall n$ implica que X es geométrica. Procedemos por inducción: para el caso $n = 1$ tenemos

$$p = r(1) = \frac{p_X(1)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = p_X(1)$$

y vemos que se verifica la fórmula de la probabilidad geométrica, para $n = 1$. Supongamos ahora que $p_X(k) = q^{k-1}p$, $1 \leq k \leq n$, entonces, por la hipótesis de inducción,

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{k=1}^{n} p_X(k) = p \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 - q^n.$$

Luego

$$p = r(n+1) = \frac{p_X(n+1)}{\mathbb{P}(X \geq n+1)} = \frac{p_X(n+1)}{1 - \mathbb{P}(X \leq n)} = \frac{p_X(n+1)}{q^n},$$

de donde obtenemos $p_X(n+1) = q^n p$, concluyendo así la demostración.