

GUÍA DE EJERCICIOS #2

1. Se escoge un punto (número real) al azar en el intervalo $[0, 2]$, de acuerdo con el modelo *uniforme*. Es decir, la coordenada X del punto es una v.a. uniforme en $[0, 2]$, con densidad constante en dicho intervalo y nula afuera.
 - a) Calcule la probabilidad de que el número obtenido sea mayor que 1, sabiendo que es mayor que $1/2$. (Use la definición de probabilidad condicional).
 - b) Calcule la probabilidad de que el primer dígito de la expansión decimal del número seleccionado sea par.
2. Investigaciones de una empresa de ingeniería de transporte muestran que el tiempo de espera en minutos, hasta que pase el metro por una estación (para un pasajero recién llegado al andén), es una v.a. T con función de distribución F_T definida por: $F_T(t) = 0$ para $t \leq 0$; $F_T(t) = t/2$ para $0 \leq t \leq 1$; $F_T(t) = 1/2$ para $1 \leq t \leq 2$; $F_T(t) = t/4$ para $2 \leq t \leq 4$; $F(t) = 1$ para $t \geq 4$.
 - a) Grafique la función de distribución.
 - b) Determine si F es continua y calcule su densidad de ser posible.
 - c) Calcule la probabilidad de que una persona tenga que esperar (a) más de 3 minutos; (b) menos de 3 minutos; (c) entre 1 y 3 minutos.
 - d) Calcule la probabilidad de que la persona espere (a) más de 3 minutos, sabiendo que ya lleva 1 minuto esperando; (b) menos de 3 minutos, dado que lleva 1 minuto esperando.
3. Se quiere construir un cuadrado aleatorio, escogiendo su lado como una v.a. uniforme en $[0, 1]$. Calcule la probabilidad de que el área del cuadrado resultante sea mayor que $1/4$; igual a $1/4$.
4. Considere la elección de un número al azar X , según el modelo *exponencial* de parámetro $\lambda > 0$, con densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ para $x < 0$.
 - a) Calcule $P(X > t)$, donde $t \geq 0$.
 - b) Calcule la probabilidad de que la parte entera de X sea k , con $k \in \mathbb{N}$.
 - c) Demuestre que $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$, propiedad conocida como falta de memoria del modelo exponencial (use la definición de probabilidad condicional).
5. Un paracaidista aterriza en un camino recto que une dos ciudades A y B, de manera que su punto de impacto es una v.a. uniforme. Calcule la probabilidad de que el cociente de su distancia a A sobre la distancia a B sea (a) mayor que 3; (b) igual a 3; (c) mayor que r , donde r es un real positivo cualquiera.
6. El Presidente de la Academia de Ciencias ha organizado un debate para zanjar el problema de generar al azar una cuerda en una circunferencia de radio R . Un académico propone dibujar un radio y escoger sobre él un punto al azar, de acuerdo con la ley Uniforme en $[0, R]$ y luego, en dicho punto, trazar una perpendicular al radio, definiendo así una cuerda. Un segundo académico propone dibujar un par de radios que formen un ángulo Θ , escogido al azar, con ley uniforme en $[0, \pi]$, y construir la cuerda uniendo los extremos de los radios. Para orientar la discusión, el presidente contrata a un estudiante de este curso cuya misión es

- a) Determinar, si es que existe, la densidad de probabilidad del largo de la cuerda en cada uno de los métodos propuestos y
 - b) Calcular los respectivos valores esperados y varianzas.
7. Se dice que una v.a. X es simétrica si X y $-X$ tienen la misma ley. Muestre que si $E(X)$ es finita, entonces necesariamente debe valer 0.
 8. Una estación de radio transmite un noticiero cada hora, a la hora, entre las 6 AM y las 12 PM. Una persona sintoniza su radio en un instante aleatorio T del día, cuya ley es uniforme en el intervalo $[T_1, T_2]$. Calcule la probabilidad de que tenga que esperar menos de 10 minutos hasta oír el noticiero, en los siguientes casos: $T_1 = 6 \text{ AM}, T_2 = 12 \text{ PM}$, $T_1 = 8 \text{ AM}, T_2 = 6 \text{ PM}$, $T_1 = 7 : 30 \text{ AM}, T_2 = 5 : 30 \text{ PM}$, $T_1 = 7 : 30 \text{ AM}, T_2 = 5 \text{ PM}$.
 9. Calcule esperanza y varianza de las variables aleatorias cuyas densidades se presentan a continuación.
 - a) $f(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}$.
 - b) $f(x) = |x|\mathbf{1}_{[-1,1]}$.
 - c) $f(x) = (1 - |1 - x|)\mathbf{1}_{[0,1]}$.
 - d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{[0,1]}$.
 - e) $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}(1 + \frac{x^2}{3})^{-1}$
 - f) $f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}(1 + \frac{x^2}{3})^{-2}$
 - g) $f(x) = \frac{8}{3\pi\sqrt{3}}(1 + \frac{x^2}{3})^{-3}$
 10. Calcule la función generadora de la v.a. X con densidad $f_X(x) = ae^{-a|x|}$, para $x \in \mathbb{R}$.
 11. Sea F la función de distribución de alguna v.a. real. Sea $F^{-1}(y) = \inf\{x | F(x) \geq y\}$, para $0 \leq y \leq 1$. Sea U una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. Demuestre que $X = F^{-1}(U)$ tiene distribución F .
 12. Sea X una v.a. con función de distribución $F(x)$, dada por: $F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = \frac{x+1}{4}$ si $0 \leq x < 1$ o $2 \leq x < 3$; $F(x) = 3/4$ si $1 \leq x < 2$ y $F(x) = 1$ si $x \geq 3$. Calcule $P(X < 2)$, $P(X \leq 1)$, $P(1 < X \leq 3)$, $P(X > 0)$, $P(0 \leq X \leq 1)$, $P(X > 1)$.
 13. Una vaca de raza Gelbvieh Alemana tiene una producción diaria de leche que puede modelarse matemáticamente mediante la v.a. X absolutamente continua, con densidad $f(x) = \alpha x$ si $0 \leq x \leq 5$; $f(x) = \alpha(\beta - x)$ si $5 \leq x \leq \beta$ y $f(x) = 0$ en otro caso.
 - a) Determine α y β para que f sea una densidad de probabilidad continua.
 - b) Calcule la probabilidad de que Dolly produzca al menos 7 litros, entre 3 y 8; menos de 7, sabiendo que produjo más de 5.
 - c) Calcule la esperanza de X .
 14. Una caja contiene n bolitas, de las cuales a son blancas y b son negras, $a + b = n$. Se extraen sucesivamente las bolitas al azar y sin reposición. Sea T la variable aleatoria definida como el instante de aparición de la primera bolita blanca. Determine la función de probabilidad $p_T(t)$. Calcule el límite de $p_T(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$, suponiendo que $a = a_n$ depende de n y es tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = p > 0$.
 15. Un experimento consiste en realizar indefinidamente lanzamientos independientes de un par de dados equilibrados. Calcule la función de probabilidad de la v.a. X correspondiente al instante en que aparece por primera vez un par de valores cuya suma es 7.

16. Dos personas compiten en una serie de juegos y triunfa el primero que haya acumulado 4 juegos ganados. Suponga que una de las personas es mejor que la otra y que tiene una probabilidad p de ganar un juego cualquiera de la serie. Suponga también que hay independencia entre sucesivos juegos. Determine la función de probabilidad de la v.a. T definida como el instante en que termina el juego.
17. Considere el experimento que consiste en hacer lanzamientos independientes de una moneda cargada (probabilidad de cara p) hasta el instante en que por primera vez hay r caras o r sellos. Defina la variable aleatoria T como el número de la tirada en que esto ocurre y calcule su función de probabilidad.
18. Se ha determinado que la venta diaria de una panadería, expresada en kilos de pan, es una v.a. discreta K con valores enteros no negativos y función de probabilidad $p_K(k)$ dada por: $p_K(k) = Ak$ si $0 \leq k < 500$; $p_K(k) = A(1000 - k)$ si $500 \leq k < 1000$ y $p_K(k) = 0$ en otro caso.
 - a) Determine A para que p_K sea una función de probabilidad.
 - b) Grafique la función de probabilidad.
 - c) Calcule la probabilidad de que el pan vendido sea (a) más de 500 kilos; (b) menos de 500 kilos; (c) entre 250 y 750 kilos.
 - d) Calcule (usando la definición conocida de probabilidad condicional) $P[K > 500 | K < 500]$ y $P[K > 500 | 250 < K < 750]$.
19. Una señora recibe en el día de la madre una caja de chocolate blanco, con B unidades y otra de chocolate negro, con N unidades. A partir de ese instante, diariamente escoge una caja al azar y se come un chocolate, hasta el momento en que por primera vez se encuentra con una caja vacía. Suponga que las elecciones sucesivas son independientes.
 - a) Calcule la función de probabilidad $p_R(n)$ de la v.a. R , definida como la cantidad de chocolates que le quedan en la otra caja. Indicación: se sugiere razonar a partir de la variable aleatoria T , definida como el momento en que encuentra la caja vacía, y relacionarla con R .
 - b) Suponga que ambas cajas contienen la misma cantidad de chocolates. Calcule el número más probable de chocolates que le quedan en la otra caja. Indicación: se trata de buscar el o los valores de n que maximizan $p_R(n)$, para lo cual se sugiere estudiar la monotonía de $p_R(n)$.