P1 Carrera de Exponenciales

Una empresa constructora posee una grúa que puede presentar fallas operacionales por dos motivos distintos. Una de las piezas del engranaje que manipula la tracción de la grúa se puede fracturar, o bien el convertidor del sistema eléctrico se puede quemar. Según las especificaciones técnicas del fabricante, la vida útil del engranaje es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 20 días. Por otro lado, la empresa ha observado que dado el uso que le da a la grúa, el sistema eléctrico colapsa debido al convertidor también siguiendo una distribución exponencial de media 15 días. ¿Cuál es la probabilidad de que en una grúa nueva el engranaje falle antes que el sistema eléctrico?

$\lambda_e = \frac{1}{20}$ $\quad X \sim \exp(\lambda_e),\ f_X(t) = \lambda_e e^{-\lambda_e t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}$

$\lambda_s = \frac{1}{15}$ $\quad Y \sim \exp(\lambda_s)$

Condicionar

$$P(X \leq Y) = \int_0^\infty P(X \leq Y \mid Y = t) f_Y(t)\, dt$$

$$\mathbb{P}(X \leq Y \mid Y = t) = \mathbb{P}(X \leq t \mid Y = t)$$

Falto escribirlo en el enunciado

Independencia

$$= P(X \leq t)$$

$$= \int_0^t \lambda_e e^{-\lambda_e t}\, dt$$

$$= e^{-\lambda_e t} \Big|_t^0 = 1 - e^{-\lambda_e t}$$

Reemplazando

$$P(X \leq Y) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_e t}) \lambda_s e^{-\lambda_s t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\lambda_s e^{-\lambda_s t}}_{f_Y(t)} dt - \frac{\lambda_s}{(\lambda_s+\lambda_e)} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda_s+\lambda_e) e^{-(\lambda_s+\lambda_e)t}\, dt}_{\int f_Z(t)\, dt = 1}$$

$$= 1 - \frac{\lambda_s}{\ }$$

$\lambda_{n} + \lambda_{e}$

$$= \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_n}$$

Reemplazando

$$\Rightarrow P(X \leq Y) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{4} / \frac{7}{12} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

P2 Ventajas de usar la función generadora de momentos

Sean $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y sea $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, ambas variables aleatorias normales con sus respectivos paramentros e independientes entre ellas. Pruebe que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Propuesto Probar esto condicionando, sobre el valor de una de las normales (como en el auxiliar 6) y notar que esto es mucho mas tedioso.

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) \overset{\text{Aux 9}}{=} e^{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}$$

$$\psi_Y(t) = E(e^{tY}) = e^{\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}$$

$$\psi_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} \cdot e^{tY}) \quad \begin{pmatrix}\text{usando}\\ \text{Aux 9}\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Ind}}{=} E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY})$$

$$= \psi_X(t) \cdot \psi_Y(t)$$

$$= e^{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}$$

$$= e^{(\mu_1 + \mu_2)t + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2}}$$

$$= \psi_Z(t), \quad Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

P3 Suponga que la duración de un instrumento electrónico de marca A tiene distribución $\mathcal{N}(40, 36)$ y la duración de un instrumento electrónico de marca B tienen distribución $\mathcal{N}(45, 9)$. Suponga que la duración de los instrumentos son independientes.

σ^2

a) Si usted puede comprar uno sólo. ¿Cuál debe preferir para usarlo por un periodo de 48 horas?

b) Si usted puede comprar 2 instrumentos ¿Que combinación compraria si necesita usarlo por 90 horas?

c) Si usted puede comprar sólo 1, pero pretende usarlo con otro dispositivo que aumenta al doble la duración del instrumento. ¿Cuál debo comprar para usarlo por 90 horas?

A: duración A

B: duración B

a) $$\mathbb{P}(A \geq 48) = \mathbb{P}\left(\frac{A-40}{6} \geq \frac{48-40}{6}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{4}{3}\right)$$

$$\mathbb{P}(B \geq 48) = \mathbb{P}\left(\frac{B-45}{3} \geq \frac{48-45}{3}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 1)$$

$$\mathbb{P}(Z \geq 1{,}33) = 0{,}091$$

$$\mathbb{P}(Z \geq 1) = 0{,}158$$, conviene usar B

b) (A, B), (B_1, B_2) y (A_1, A_2)

Caso 1

$$\mathbb{P}(A \geq 90, B \geq 90) \overset{Ind}{=} \mathbb{P}(A \geq 90) \cdot \mathbb{P}(B \geq 90)$$

- $\mathbb{P}(A \geq 90) = \mathbb{P}\left(\frac{A-40}{6}, \frac{50}{6}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 8{,}3)$
- $\mathbb{P}(B \geq 90) = \mathbb{P}\left(\frac{B-45}{3}, \frac{45}{3}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 15)$

$Z \geq 8{,}3$ tiene más opciones que $Z \geq 15$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \geq 90)$ es mayor (monotonía)

Conviene compra 2 de A

c) $$\mathbb{P}((2 \cdot A) \geq 90) = \mathbb{P}(A \geq 45)$$ Similar que

$\mathbb{P}((2 \cdot B) \geq 90) = \mathbb{P}(B \geq 45)$ en a)

P3 Suponga que la duración de un instrumento electrónico de marca A tiene distribución $\mathcal{N}(40, 36)$ y la duración de un instrumento electrónico de marca B tienen distribución $\mathcal{N}(45, 9)$. Suponga que la duración de los instrumentos son independientes.

a) Si usted puede comprar uno sólo. ¿Cuál debe preferir para usarlo por un periodo de 48 horas?

b) Si usted puede comprar 2 instrumentos ¿Que combinación compraria si necesita usarlo por 90 horas?

c) Si usted puede comprar sólo 1, pero pretende usarlo con otro dispositivo que aumenta al doble la duración del instrumento. ¿Cuál debo comprar para usarlo por 90 horas?

b) $A_1+A_2 \sim N(80, 72)$, $B_1+B_2 \sim N(90, 18)$

$A+B \sim N(85, 45)$

$$\mathbb{P}(A_1+A_2 \geq 90) = \mathbb{P}\left(\frac{A_1+A_2-80}{\sqrt{72}} \geq \frac{10}{\sqrt{72}}\right)$$

$$= \mathbb{P}(z \geq 1{,}17) = 0.12$$

$$\mathbb{P}(B_1+B_2 \geq 90) = \mathbb{P}\left(\frac{B_1+B_2-90}{\sqrt{18}} \geq 0\right)$$

$$= \mathbb{P}(z \geq 0) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A+B \geq 90) = \mathbb{P}\left(\frac{A+B-85}{\sqrt{45}} \geq \frac{5}{\sqrt{45}}\right)$$

$$= \mathbb{P}(z \geq 0.74) = 0.23$$

Usar 2 del Tipo B

c) $\mathbb{P}(2 \cdot A \geq 90) = \mathbb{P}(A \geq 45) = \mathbb{P}\left(z \geq \frac{5}{6}\right)$

$$= \mathbb{P}(Z \geq 0.83) = 0.2$$

$$\mathbb{P}(2 \cdot B \geq 90) = \mathbb{P}(B \geq 45) = \mathbb{P}(Z \geq 0) = 0.5$$

Tomamos B como la mejor opción