Pauta Tarea 1

P1 Datos: $\mathbb{P}(M_i) = 0.38$, $\mathbb{P}(BA) = 0.47$, $\mathbb{P}(M_A) = 0.2$

$\mathbb{P}(M_A \cap BA) = 0.07$, $\mathbb{P}(M_A \cap M_i) = 0.08$, $\mathbb{P}(BA \cap M_i) = 0.15$

$\mathbb{P}(M_A \cap BA \cap M_i) = 0.05$

Cada alternativa vale 0.25 (No descontar por arrastre en otras alternativas)

a) Esto es $\mathbb{P}(M_A \cup BA \cup M_i)$, usando Inclusión Exclusión

+0.05

$$\mathbb{P}(M_A \cup BA \cup M_i) = \mathbb{P}(M_A) + \mathbb{P}(BA) + \mathbb{P}(M_i) + \mathbb{P}(M_A) - \mathbb{P}(M_A \cap BA) - \mathbb{P}(M_A \cap M_i) - \mathbb{P}(BA \cap M_i) + \mathbb{P}(M_A \cap BA \cap M_i)$$

+0.2

(Con esto basta, no descontar si se equivocan al reemplazar los valores)

$$\mathbb{P}(M_A \cup BA \cup M_i) = 0.38 + 0.47 + 0.2 - 0.07 - 0.08 - 0.15 + 0.05$$
$$= 0.8$$

b) Esto es $\mathbb{P}(M_A \cap BA^c \cap M_i^c)$, pueden haber varias opciones

+0.05

Notando que $\mathbb{P}(M_A \cap BA^c \cap M_i^c) + \mathbb{P}(M_A^c \cap BA^c \cap M_i^c) = \mathbb{P}(BA^c \cap M_i^c)$

y $\mathbb{P}(BA^c \cap M_i^c) = 1 - \mathbb{P}(BA \cup M_i) = 1 - [\mathbb{P}(BA) + \mathbb{P}(M_i) - \mathbb{P}(BA \cap M_i)]$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M_A \cap BA^c \cap M_i^c) = \underline{1} - [\mathbb{P}(BA) + \mathbb{P}(M_i) - \mathbb{P}(BA \cap M_i)] - \underline{\mathbb{P}(M_A^c \cap BA^c \cap M_i^c)}$$
$$= \mathbb{P}(M_A \cup BA \cup M_i) - \mathbb{P}(BA) - \mathbb{P}(M_i) + \mathbb{P}(BA \cap M_i)$$

Con esto basta para el +0.2

De manera ~~equivalente~~

$\mathbb{P}(MA \cap BA^c \cap Mi^c) = \mathbb{P}(MA) - \mathbb{P}(MA \cap BA) - \mathbb{P}(MA \cap Mi) + \mathbb{P}(MA \cap BA \cap Mi)$

Esto se puede escribir de manera directa y es +0.2

---

c) Esto es $\mathbb{P}(Mi \cap MA \cap BA^c)$ +0.05

Usando que (Bayes) $\mathbb{P}(Mi \cap MA) = \mathbb{P}(Mi \cap MA \cap BA^c) + \mathbb{P}(Mi \cap MA \cap BA)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Mi \cap MA \cap BA^c) = \mathbb{P}(Mi \cap MA) - \mathbb{P}(Mi \cap MA \cap BA)$ +0.2

(También pueden decir que es ir a Mi y MA y no ir a los 3)

---

d) Tienen que probar que $\mathbb{P}(BA \cap MA) = \mathbb{P}(BA) \cdot \mathbb{P}(MA)$ +0.05 (Escribirlo)

Reemplazando: $0.07 \neq 0.47 \cdot 0.2 \Rightarrow$ No es independiente +0.2

P2 $\Omega = \{A \subseteq \{H_1, H_2, \dots, H_{10}, M_1, \dots, M_{10}\} \mid |A| = 12\}$

"Son Todos los subconjuntos de Tamaño 12 de los 10 H y 10 M"

Por esto 0,1 puntos

---

a) Casos Favorables: A Tal que $A = A_1 \cup A_2$, con

$A_1 \subseteq \{H_1, \dots, H_{10}\}$, $A_2 \subseteq \{M_1, \dots, M_{10}\}$ y $|A_1| = |A_2| = 6$

$\Rightarrow$ Hay $\binom{10}{6}$ opciones para A_1, $\binom{10}{6}$ para A_2

Casos Totales: $|\Omega| = \binom{20 \to \text{Opciones}}{12 \to \text{Tamaño } A}$

$\Rightarrow \dfrac{\binom{10}{6} \cdot \binom{10}{6}}{\binom{20}{12}}$ $\boxed{+0.15 \text{ pts}}$ (Si llega a lo mismo con otro conteo u otro espacio muestral, esta bueno)

DA: $210^2 / 125970 \approx 0.35$

---

b) # par de mujeres

Casos Favorables: $A = A_1 \cup A_2$ Tal que $|A_1| = 2K$ y $|A_2| = 12 - 2K$

con $K \in \{1, \dots, 5\}$ y $A_1 \subseteq \{H_1, \dots, H_{10}\}$, $A_2 \subseteq \{M_1, \dots, M_{10}\}$

$\Rightarrow$ Hay $\binom{10}{2K}$ para A_1 y $\binom{10}{10-2K}$ para A_2 (Es igual a $\binom{10}{2K}$)

Los mismos casos Totales $\Rightarrow \sum_{K=1}^{5} \binom{10}{2K}^2 \Big/ \binom{20}{12}$ $\boxed{+0.15 \text{ pts}}$

(Debe decir que se pueden sumar, pues son disjuntos) Si no solo 0.1, pues diferentes # de hombres y mujeres

DA: $\dfrac{92251}{125970}$

c) Hay que imponer que $A = A_1 \cup A_2$ y $|A_2| > |A_1| = 12 - |A_2|$

$\Rightarrow 2|A_2| > 12 \Rightarrow |A_2| > 6$ (Es mayor estricto) $\boxed{\begin{array}{l} A_1 \subseteq \{H_1, \dots, H_{10}\} \\ A_2 \subseteq \{M_1, \dots, M_{10}\} \end{array}}$

$\Rightarrow$ Hay $\binom{10}{K}$ con $K \in \{7, \dots, 10\}$ opciones para A_2

y $\binom{10}{12-K}$ para A_1

$\Rightarrow$ Casos Favorables $\sum_{K=7}^{10} \binom{10}{K}\binom{10}{12-K}$, decir que son disjuntos

igual casos totales

$$\Rightarrow \frac{\sum_{K=7}^{10} \binom{10}{K}\binom{10}{12-K}}{\binom{20}{12}}$$

$\boxed{+0.15 \text{ pts}}$ Da: $\frac{40935}{125970} \cong 0,3249$

---

d) Al menos 8 hombres $\Rightarrow A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \subseteq \{H_1, \dots, H_{10}\}$
$M_1 \subseteq \{M_1, \dots, M_{10}\}$

$|A_1| \geq 8 \Rightarrow |A_1| \geq K$, $K \in \{8, 9, 10\} \Rightarrow |A_2| = 12 - K$

Casos favorables: $\sum_{K=8}^{10} \binom{10}{K}\binom{10}{12-K}$ (Decir que son disjuntos)

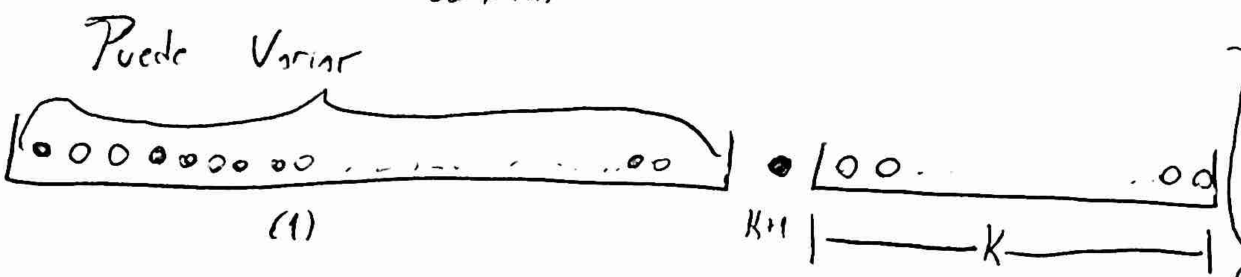
Igual Totales

$$\Rightarrow \frac{\sum_{K=8}^{10} \binom{10}{K}\binom{10}{12-K}}{\binom{20}{12}}$$

$\boxed{+ 0.15 \text{ pts}}$ Da: $\frac{10695}{125970} \simeq 0\,0849$

P3 Hacer caso terminan en negro (El otro análogo)

Esquema (Todas las soluciones coinciden en las últimas $K+1$ bolitas)



0.2

Como solo (1) es lo que cambia, contar de cuantas formas se puede ordenar

Hay $N-1$ ●

$N-K$ ○

Usando permutaciones con 2 tipos (También se puede usar combinatoria con las posiciones o con barras y círculos)

$$\Rightarrow \frac{((N-1)+(N-K))!}{(N-1)!\,(N-K)!} = \binom{2N-K-1}{N-1} = \binom{2N-K-1}{N-K}$$

0.4

Como ya se mencionó que el caso blancas es análogo y es disjunto.

$$\Rightarrow \text{Casos favorables} = 2\cdot\binom{2N-K-1}{N-K}$$

0.2

El casos totales basta ordenar N ● y N ○ en una fila lo que es $\binom{2N}{N}$ $\Rightarrow P = \dfrac{2\cdot\binom{2N-K-1}{N-K}}{\binom{2N}{N}}$

0.2

Pauta Tarea 1

La distribución de décimas es solo sugerencia, la idea es que cada pregunta valga un punto.

P4

La ONEMI ha implementado un sistema de alarma para evacuación en caso de tsunami. Se sabe que el sistema puede fallar, en el sentido que anuncia tsunami cuando no lo hay (con probabilidad α) y no anuncia tsunami cuando si lo hay (con probabilidad β). Suponiendo que la probabilidad de que ocurra un tsunami es p, calcule la probabilidad de que realmente haya tsunami, cuando la alarma se dispara (como función de α, β, p).

Sol: Sean los eventos $A = \{$ *"La alarma anuncia tsunami"*$\}$ y $T = \{$ *"Hay tsunami"*$\}$ con sus respectivos e intuitivos complementos $A^c = \{$ *"La alarma no anuncia tsunami"*$\}$ y $T^c = \{$ *"No hay tsunami"*$\}$. La parte clave es identificar (modelar) que la palabra "cuando" simboliza información conocida y en consecuencia nos están hablando de probabilidades condicionales. Además, nos entregan la probabilidad de que haya tsunami, con esto:

$$\mathbb{P}(A|T^c) = \alpha \tag{1}$$
$$\mathbb{P}(A^c|T) = \beta \tag{2}$$
$$\mathbb{P}(T) = p \tag{3}$$

Nos están preguntando por la probabilidad de que haya tsunami cuando la alarma anuncie, es decir, $\mathbb{P}(T|A)$. Para hacer los cálculos usaremos Bayes, probabilidades totales y que la probabilidad condicional también es una probabilidad. Luego,

$$\mathbb{P}(T|A) = \frac{\mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{(1-\mathbb{P}(A^c|T))\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A|T^c)\mathbb{P}(T^c)} = \frac{(1-\beta)p}{(1-\beta)p + \alpha(1-p)} \leq 1 \tag{4}$$

Lo cual es menor que uno y por lo tanto tiene sentido. Se concluye entonces,

$$\mathbb{P}(T|A) = \frac{(1-\beta)p}{(1-\beta)p + \alpha(1-p)}$$

Obs: El espacio $(\Omega, \mathbb{P})$ no es muy relevante para este problema, basta pensar que estamos trabajando en un espacio tal que las ecuaciones 1, 2 y 3 se cumplan.

Distribución:

- Identificar que se cumplen las ecuaciones 1, 2 y 3: 0.3
- Usar Bayes: 0.3
- Tomar complemento para obtener el numerador en 4: 0.1
- Probabilidades totales y complemento para el denominador en 4: 0.3

P5

La probabilidad de que un fósforo en buen estado efectivamente se encienda cuando se intenta encenderlo es p, independiente de los otros intentos, mientras que un fósforo en mal estado nunca enciende. De una caja con n fósforos buenos y m malos usted extrae un fósforo al azar.

a) Si en el primer intento el fósforo no prende, ¿cuál es la probabilidad de que esté malo?

Sol: Estamos en presencia un suceso que tiene cierta probabilidad dependiendo de si pasa o no otro evento. Esto lo expresaremos con probabilidades condicionales, definamos $A_i = \{$ *"El fósforo enciende al n-ésimo intento"*$\}$ con A_i^c el evento en que no enciende al n-ésimo intento. Sean tambien, $B = \{$*Se saca un fósforo bueno de la caja*$\}$ y B^c el evento que representa sacar un fósforo malo. Notar que la familia $(A_i)_i$ puede o no ser independiente, solo sabemos que hay independencia al condicionar sobre B o B^c. Luego, la información que nos dan se traduce en:

$$\mathbb{P}(A_i|B^c) = 0 \tag{5}$$
$$\mathbb{P}(A_i|B) = p \tag{6}$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n|B) = p^n \tag{7}$$
$$\mathbb{P}(A_1^c \cap ... \cap A_n^c|B) = (1-p)^n \tag{8}$$

Donde 5 es porque cuando el fósforo está malo nunca enciende, 7 y 8 también son válidas cuando hay combinaciones entre A_i^c's y A_j's (es como una binomial de parámetro p) y 6 es porque un fósforo bueno tiene probabilidad p de encender. Este análisis se usará durante toda la pregunta.

Ahora resolvemos la pregunta. Nos piden la probabilidad de que el fósforo esté malo dado que en el primer intento no encendió, es decir, $\mathbb{P}(B^c|A_1)$ para lo cuál usamos Bayes y probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(B^c|A_1^c) = \frac{\mathbb{P}(A_1^c|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A_1^c)} = \frac{1 \cdot \frac{m}{n+m}}{\mathbb{P}(A_1^c|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_1^c|B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \frac{1 \cdot \frac{m}{n+m}}{(1-p)\frac{n}{n+m} + 1 \cdot \frac{m}{n+m}} \leq 1$$

Donde se chequea que la probabilidad es a lo más 1. Se concluye entonces:

$$\mathbb{P}(B^c|A_1^c) = \frac{m}{(1-p)n + m}$$

b) Aún suponiendo que no enciende en el primer intento, ¿cuál es la probabilidad que encienda en el siguiente intento?

Sol: Suponemos A_1^c nos preguntan la probabilidad de que encienda en el segundo intento, es decir, $\mathbb{P}(A_2|A_1^c)$. Calculamos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2|A_1^c) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c)}{\mathbb{P}(A_1^c)} = \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A_1^c|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_1^c|B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \frac{(1-p)p\frac{n}{n+m} + 0}{(1-p)\frac{n}{n+m} + 1 \cdot \frac{m}{n+m}} \\ &= \frac{(1-p)pn}{(1-p)n + m}\end{aligned}$$

Donde usamos que $\mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c|B^c) \leq \mathbb{P}(A_2|B^c) = 0$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(A_2|A_1^c) = \frac{(1-p)pn}{(1-p)n + m}$$

c) Usted planea probar el fósforo k veces, y si no enciende, usted lo desecha. Sea P_k la probabilidad de que al desechar el fósforo este sea bueno. Dado $\alpha \in (0, 1)$, calcule el el mínimo k tal que P_k es menor o igual a α.

Sol: Identificamos primero que el evento $D := \{$ *"Desechar"*$\} = A_1^c \cap ... \cap A_k^c$. Luego, expresamos P_k, la probabilidad de que el fósforo sea bueno dado que se ha desechado, como $P_k = \mathbb{P}(B|D)$. Calculamos e imponemos $P_k \leq \alpha$:

$$\mathbb{P}(B|D) = \mathbb{P}(B|A_1^c \cdots A_k^c) = \frac{\mathbb{P}(A_1^c \cdots A_k^c|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_1^c \cdots A_k^c)} = \frac{\mathbb{P}(A_1^c \cdots A_k^c|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_1^c \cdots A_k^c|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_1^c \cdots A_k^c|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \tag{9}$$

$$= \frac{(1-p)^k \frac{n}{n+m}}{(1-p)^k \frac{n}{n+m} + 1 \cdot \frac{m}{n+m}} = \frac{(1-p)^k n}{(1-p)^k n + m} \leq \alpha \tag{10}$$

$$\implies P_k = \frac{(1-p)^k n}{(1-p)^k n + m} \tag{11}$$

Ahora la idea es despejar el k tal que se verifique la última igualdad. Pero antes, notamos que $P_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ y es por esto que tiene sentido encontrar el primer k tal que se tenga $P_k \leq \alpha$. Despejamos:

$$\begin{aligned}
\frac{(1-p)^k n}{(1-p)^k n + m} &\leq \alpha \\
(1-p)^k n &\leq \alpha((1-p)^k n + m) \\
(1-\alpha)(1-p)^k n &\leq \alpha m \\
(1-p)^k &\leq \frac{\alpha m}{(1-\alpha)n}, \ \textit{tomamos log}(\cdot) \\
k \underbrace{log(1-p)}_{<0} &\leq log\left(\frac{\alpha m}{(1-\alpha)n}\right), \ 0 < 1-p < 1 \\
k &\geq \frac{log\left(\frac{\alpha m}{(1-\alpha)n}\right)}{log(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que el primer k tal que $P_k \leq \alpha$ será el primer entero mayor o igual a $\frac{log\left(\frac{\alpha m}{(1-\alpha)n}\right)}{log(1-\alpha)}$.

Obs: Si consideramos un α pequeño y obtenemos el k de arriba, lo que nos dice el problema es que si probamos el fósforo k veces y no funciona, entonces al botarlo tenemos poca probabilidad de que el fósforo haya sido bueno. O al revés, si el fósforo no prende después de k intentos, hay alta probabilidad de que el fósforo esté malo.

Distribución:

- Identificar que se cumplen cosas como 5, 6, 7 y 8: 0.1
- Parte a, traducir lo que se pide a probabilidades: 0.1 y usar Bayes y probabilidades totales: 0.2
- Parte b, traducir lo que se pide a probabilidades: 0.1 y usar Bayes y probabilidades totales: 0.2
- Parte c, identificar que es P_k: 0.15 e imponer que se debe cumplir la desigualdad en 10: 0.15

P6

Un jugador de emboque va a participar en un torneo del barrio. Para ello compró con anticipación 5 emboques aparentemente idénticos y los usó por varios meses hasta que escogió aquél con mejores resultados. Así con el emboque "regalón" la probabilidad de acierto de cualquier lanzamiento es $2/3$, en cambio para los restantes cuatro emboques esta probabilidad es sólo $1/2$. El día del campeonato vio con estupor que la noche anterior había guardado el emboque regalón junto con los otros emboques, por lo que no era capaz de distinguirlos. Desesperado y atrasado, escoge uno de ellos al azar y se va al campeonato.

a) Si para ganar el campeonato necesita hacer al menos 7 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que gane el campeonato?

Sol: Definamos $R = \{$ *"Escogió el regalón"*$\}$ y $G_i = \{$ *"Realiza i de 10 aciertos"*$\}$, y por lo tanto el evento en el que gana el campeonato es $G = G_7 \cup G_8 \cup G_9 \cup G_{10}$. Resolveremos el problema aplicando el modelo binomial haciendo el paralelo entre embocar y éxito (o que salga cara) y entre obtener i éxitos y el evento G_i. No obstante, el modelo es aplicable una vez que sabemos la probabilidad de éxito, y esto lo sabremos sólo cuando condicionemos. Con todo lo anterior, procedemos a calcular:

$$\mathbb{P}(\{\text{“}\textit{Ganar el campeonato}\text{”}\}) = \mathbb{P}(G) = \sum_{i=7}^{10} \mathbb{P}(G_i) = \sum_{i=7}^{10} \mathbb{P}(G_i|R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(G_i|R^c)\mathbb{P}(R^c) \tag{12}$$

$$= \sum_{i=7}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{10-i} \frac{1}{5} + \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} \frac{4}{5} \tag{13}$$

Dónde usamos que la unión que define a G es en esencia disjunta y probabilidades totales. Concluimos entonces que:

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{i=7}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{10-i} \frac{1}{5} + \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{4}{5}$$

b) Si gana obteniendo 8 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente escogido su emboque regalón?

Sol: Aquí tenemos que identificar que la información que nos dan apunta a condicionar. Es decir, nos interesa $\mathbb{P}(R|G_8)$. Luego,

$$\mathbb{P}(R|G_8) = \frac{\mathbb{P}(G_8|R)\mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(G_8)} = \frac{\mathbb{P}(G_8|R)\mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(G_8|R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(G_8|R^c)\mathbb{P}(R^c)}$$

$$= \frac{\binom{10}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{5}}{\binom{10}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{5} + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{4}{5}}$$

Despejando un poco concluimos,

$$\mathbb{P}(R|G_8) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{5}}{\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\frac{4}{5}}$$

Distribución:

- Escribir el evento en que gana el campeonato: 0.2
- Parte a, identificar que la unión que define a G es disjunta y escribir la suma en 12: 0.2 y desarrollar usando probabilidades totales para llegar a cosas conocidas: 0.2
- Parte b, identificar que lo que se pide es una probabilidad condicional: 0.1 y desarrollar esta probabilidad con Bayes y probabilidades totales para llegar a términos conocidos: 0.3