Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidad y Estadística MA 3403, 1/06/20, Prof. R. Gouet

Prof. Aux. J. Castro y V. Salinas

Solución Control #1

1. Suponga que se dispone de seis fichas, dos las cuales son blancas por ambos lados, dos son rojas por ambos lados y dos tienen un lado blanco y uno rojo.

   a) (2 pts.) Se escoge una ficha al azar (entre las seis), se lanza y cae sobre una superficie. Suponiendo que puede caer sobre cualquiera de sus dos caras con igual probabilidad, cuál es la probabilidad de que el lado oculto de la ficha sea blanco (sin que sepamos nada del lado visible)?

   b) (2 pts.) En la situación anterior, sabiendo que el lado visible es blanco, cuál es la probabilidad de que el lado oculto sea blanco?

   c) (2 pts.) Suponga que la persona lanza nuevamente la ficha de *b*) (de la cual sabe que fue blanca en el lado visible al lanzarla la primera vez). Calcule la probabilidad de que el lado visible sea blanco.

   Sol: (a) No es necesario ni se pide especificar el espacio muestral Ω. Suponemos que ha sido definido y consideramos algunos sucesos relevantes con sus respectivas probabilidades, condicionales o no.

   Sean $E_b =$"la ficha escogida es blanca-blanca", $E_r =$"la ficha escogida es roja-roja", $E_{br} =$"la ficha escogida es blanca-roja", $B_o =$"el lado oculto de la ficha lanzada es blanco". Sabemos que hay dos fichas blanca-blanca sobre seis, dos roja-roja y dos blanca-roja. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(E_b) = \mathbb{P}(E_r) = \mathbb{P}(E_{br}) = 1/3.$$

   Además,es claro que

$$\mathbb{P}(B_o|E_b) = 1, \quad \mathbb{P}(B_o|E_r) = 0, \quad \mathbb{P}(B_o|E_{br}) = 1/2.$$

   Aplicamos la regla de probabilidades totales como sigue:

$$\mathbb{P}(B_o) = \mathbb{P}(B_o|E_b)\mathbb{P}(E_b) + \mathbb{P}(B_o|E_r)\mathbb{P}(E_r) + \mathbb{P}(B_o|E_{br})\mathbb{P}(E_{br}).$$

   Reemplazando arriba se obtiene

$$\mathbb{P}(B_o) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Sea el suceso $B_v =$"el lado visible es blanco". Nos piden calcular $\mathbb{P}(B_o|B_v)$, para lo cual usamos la definición de probabilidad condicional

$$\mathbb{P}(B_o|B_v) = \frac{\mathbb{P}(B_o \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)}.$$

   Notamos que $B_o \cap B_v = E_b$ porque la única manera de que el lado oculto y el lado visible sean blancos es que hayamos escogido una ficha blanca-blanca.

Por otra parte, es claro que la probabilidad de que el lado visible sea blanco es igual a la probabilidad de que el oculto sea blanco, es decir $\mathbb{P}(B_v) = \mathbb{P}(B_o)$. Finalmente tenemos

$$\mathbb{P}(B_o|B_v) = \frac{\mathbb{P}(B_o \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)} = \frac{\mathbb{P}(E_b)}{\mathbb{P}(B_v)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(c) Definamos ahora el suceso $B_{v2} =$"el lado visible del segundo lanzamiento es blanco". Entonces, de acuerdo con el enunciado, se pide calcular $\mathbb{P}(B_{v2}|B_v)$, para lo cual usamos nuevamente la definición de probabilidad condicional, es decir

$$\mathbb{P}(B_{v2}|B_v) = \frac{\mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)}.$$

Para el cálculo del numerador debemos apelar nuevamente a la fórmula de probabilidades totales, condicionando en que la ficha sea blanca-blanca, blanca-roja o roja-roja. Es decir

$$\mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v) = \mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v|E_b)\mathbb{P}(E_b) + \mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v|E_r)\mathbb{P}(E_r) + \mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v|E_{br})\mathbb{P}(E_{br}).$$

Si la ficha escogida es blanca-blanca, es claro que la cara visible del primer y segundo lanzamiento será blanca, por lo tanto $\mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v|E_b) = 1$. Por otra parte, si la ficha escogida es roja-roja, entonces es obvio que no puede salir blanca y $\mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v|E_r) = 0$. Finalmente, si la ficha escogida es blanca-roja, entonces la probabilidad de blanca en un lanzamiento es $1/2$ y, suponiendo lanzamientos independientes resulta $\mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v|E_{br}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Reemplazando en la fórmula de probabilidades totales, llegamos a

$$\mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

Para terminar debemos reemplazar en la probabilidad condicional de más arriba, es decir,

$$\mathbb{P}(B_{v2}|B_v) = \frac{\mathbb{P}(B_{v2} \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

2. Una caja contiene m bolitas blancas y n negras. Se extraen sucesivamente y sin reposición bolitas al azar. Calcule la probabilidad de que en el instante de la extracción k se agote uno de los dos colores en la urna.

   Sol: Aquí es útil pensar en el espacio muestral. Se propone Ω como la colección de las permutaciones u ordenamientos de las $m+n$ bolitas en una fila. Se trata de permutaciones con dos tipos de objetos repetidos, para lo cual tenemos una fórmula, a saber

$$|\Omega| = \binom{m+n}{n}.$$

   Ahora debemos identificar cuáles permutaciones corresponden al suceso de interés, que designamos por A_k. Para evitar trivialidades supongamos que $m, n > 0$ y notemos primero que $k \geq \min\{m, n\}$ y, también, que $k \leq m + n - 1$. Notar que si $k = m + n$ entonces antes ya se habría agotado un color, lo cual es una contradicción.

   Sea entonces k en el rango de valores admisibles y describamos las permutaciones que son elementos del suceso A_k.

   Sea $x = (x_1, \ldots, x_{m+n}) \in A_k$, donde $x_i \in \{B, N\}$ es el color la la bolita en la posición i (B es blanco, N es negro).

Es claro que x_k indica el color que primero se agota en la caja y, para efectos del análisis podemos comenzar suponiendo que es el blanco, es decir $x_k = B$. Luego nos ocupamos del caso $x_k = N$.

Suponiendo entonces que $x_k = B$, es necesario que todas las restantes bolitas blancas se distribuyan en las coordenadas $1, \dots, k-1$ y nos preguntamos entonces cuántas de estas permutaciones existen.

Para ello vemos que es necesario distribuir $m-1$ blancas en $k-1$ posiciones (dejando los espacios restantes para las negras), lo cual se puede hacer de $\binom{k-1}{m-1}$ maneras. Por supuesto, no hay nada que hacer con x_k, que ya sabemos que es blanca, ni con $x_{k+1}, \dots, x_{m+n}$, que deben ser todas negras, no hay nada que combinar.

Concluimos entonces que el número de permutaciones tales que el color blanco se extingue en la extracción k es $\binom{k-1}{m-1}$.

Ahora vemos el caso complementario, en que $x_k = N$, es decir se agota primero el color negro. El razonamiento es completamente análogo al caso blanco, donde basta sustituir m por n. Por lo tanto, el número de permutaciones tales que el color negro se extingue en la extracción k es $\binom{k-1}{n-1}$.

Para terminar, basta sumar los casos blanco y negro, para llegar al resultado

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{k-1}{m-1} + \binom{k-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}}.$$

La fórmula anterior vale para k en el rango $\min\{m, n\} \leq k \leq m+n-1$, siempre que usemos la convención clásica sobre los coeficientes binomiales, según la cual $\binom{x}{y} = 0$ si $x < y$.

Para ilustrar calculemos $\mathbb{P}(A_k)$ para $m = 3, n = 2$ y $k = 2, 3, 4$.

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{10}, \quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{5}.$$

Notar que $\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) = 1$, como debe ser.

3. Una hormiga se encuentra en un vértice de un cuadrado y necesita llegar al vértice opuesto (donde hay alimento), caminando por los lados del cuadrado. El problema es que en cada uno de los lados, con probabilidad p, puede haber un predador de la hormiga, que le impide pasar. La hormiga intenta pasar por donde no haya predadores. Se sabe que los sucesos relativos a la presencia del predador en cada lado son independientes. Calcule la probabilidad de que

   a) (2 pts.) La hormiga llegue a su destino.

   Sol: El problema es calcular la probabilidad de que haya un camino disponible para la hormiga, que le permita llegar a destino. No se trata de saber si la hormiga finalmente irá a comer o no.

   Hay dos caminos posibles, digamos que el camino 1 es por la parte superior del cuadrado y el camino 2, por la inferior. Sean los sucesos $L_i =$"el camino i está disponible (sin predador)", $i = 1, 2$. Entonces, L_1 ocurre si y solo si no hay predador en la arista superior (con probabilidad $1-p$) y no hay predador en la arista derecha (con probabilidad $1-p$). Dado que los sucesos de la presencia de predador son independientes, resulta que $\mathbb{P}(L_1) = (1-p)^2$.

   El análisis del camino 2 es totalmente análogo, considerando las aristas izquierda e inferior. Por lo tanto, $\mathbb{P}(L_2) = (1-p)^2$.

   El suceso $D =$"hay camino para la hormiga" se escribe como $L_1 \cup L_2$, cuya probabilidad está dada por

   $$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(L_1 \cup L_2) = \mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(L_2) - \mathbb{P}(L_1 \cap L_2).$$

   También notamos, gracias a la independencia de la aparición de predadores,

   $$\mathbb{P}(L_1 \cap L_2) = \mathbb{P}(L_1)\mathbb{P}(L_2) = (1-p)^4.$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(D) = 2(1-p)^2 - (1-p)^4.$$

b) (2 pts.) Haya al menos un predador en el cuadrado, sabiendo que la hormiga llega a destino.

Sol: Vamos a calcular aquí la probabilidad del complemento, que es más fácil. Sea $N =$"no hay predador en ninguna arista del cuadrado". Debido a la independencia de predadores es claro que $\mathbb{P}(N) = (1-p)^4$.

Debemos calcular $\mathbb{P}(\overline{N}|D)$, para lo cual usamos Bayes, notando que $\mathbb{P}(D|N) = 1$ porque si no hay predadores, ambos caminos están disponibles.

$$\mathbb{P}(\overline{N}|D) = 1 - \mathbb{P}(N|D) = 1 - \frac{\mathbb{P}(D|N)\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(D)} = 1 - \frac{1 \cdot (1-p)^4}{2(1-p)^2 - (1-p)^4} = \frac{2 - 2(1-p)^2}{2-(1-p)^2}.$$

c) (2 pts.) Haya 4 predadores en el cuadrado, sabiendo que la hormiga no llega a destino.

Sol: Sea $T =$"hay 4 predadores en el cuadrado". Claramente $\mathbb{P}(T) = p^4$, debido a la independencia.

Nos piden calcular $\mathbb{P}(T|\overline{D})$, para lo cual usamos Bayes nuevamente, notando que $\mathbb{P}(\overline{D}|T) = 1$.

$$\mathbb{P}(T|\overline{D}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{D}|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(\overline{D})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{D}|T)\mathbb{P}(T)}{1 - \mathbb{P}(D)} = \frac{1 \cdot p^4}{1 - 2(1-p)^2 + (1-p)^4}.$$

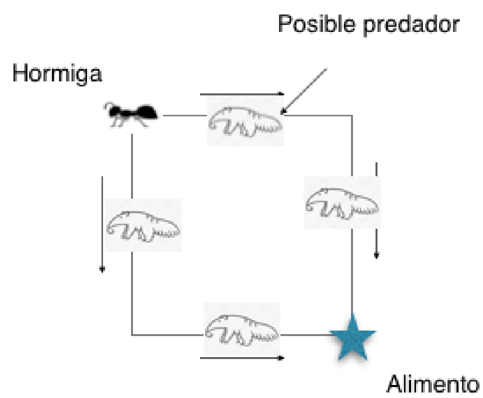

Figura 1: Hormiga en busca de alimento.