P1 *a*) Consideremos dos variables aleatorias $X \sim \text{Binomial}(r,p)$, $Y \sim \text{Binomial}(s,p)$. Supongamos que X,Y son independientes y definamos $Z = X+Y$. Demuestre que $Z \sim \text{Binomial}(s+r,p)$. **Indicación:** Puede utilizar que $\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}\binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$

b) Consideremos dos variables aleatorias discretas $X \sim \text{Geom}(p_1)$, $Y \sim \text{Geom}(p_2)$. Supongamos que son independientes y definamos $Z = \text{mín}(X,Y)$. Demuestre que $Z \sim \text{Geom}(p)$, con p por determinar.

$$\mathbb{P}(Z=K) = \,?$$

Si encontramos alguna conocida con otros parámetros distribuye así

$$\boxed{\underline{\text{Obs}} \quad K \in \mathbb{N}}$$

$$\mathbb{P}(X=K) = \binom{r}{K} p^K (1-p)^{r-K}$$

$$\mathbb{P}(Y=K) = \binom{s}{K} p^K (1-p)^{s-K}$$

$$\mathbb{P}(Z=K) = \mathbb{P}(X+Y=K)$$

Podemos ……condicionar al valor de X

Que valores puede tomar X $\quad , \ \mathbb{R}: X \in \{0, \ldots, K\}$

Condicionando (Totales)

$$\mathbb{P}(Z=K) = \sum_{i=0}^{K} \mathbb{P}(X+Y=K \mid X=i)\,\mathbb{P}(X=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{K} \mathbb{P}(Y=K-i \mid X=i)\,\mathbb{P}(X=i)$$

No le importa

$$= \sum_{i=0}^{K} \mathbb{P}(Y=K-i)\,\mathbb{P}(X=i)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{K} \binom{s}{K-i}\binom{r}{i}}_{\text{indicación}} \cdot p^{K-i} p^{i} (1-p)^{s-(K-i)} (1-p)^{r-i}$$

$$= p^K (1-p)^{(r+s)-K} \binom{r+s}{K} \sim \text{Bin}(r+s,p)$$

b) Recomendación calcular $\mathbb{P}(Z \geq K)$

$X \sim Geo(p_1) \Rightarrow P(X=K) = (1-p_1)^{K-1} p_1 \Rightarrow P(X \geq K) = \sum_{i=K}^{\infty} P(X=i)$

Infinito

$= (1-p_1)^{K-1}$

$Y \sim Geo(p_2) \Rightarrow P(Y \geq K) = (1-p_2)^{K-1}$

$P(Z \geq K) = P(\min(X,Y) \geq K) = \mathbb{P}(X \geq K, Y \geq K)$

$\overset{\perp}{=} \mathbb{P}(X \geq K) \cdot P(Y \geq K)$ (Independencia X e Y)

Reemplazando

$= (1-p_1)^{K-1} (1-p_2)^{K-1} = (1-(p_1+p_2-p_1p_2))^{K-1}$

definiendo $\bar{p} = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

$= (1-\bar{p})^{K-1} \sim Geo(\bar{p})$

P2 Una empresa tiene una producción diaria de gas que puede modelarse matemáticamente mediante la v.a. X(en toneladas) absolutamente continua, con densidad $f(x) = \alpha x$ si $0 \leq x \leq 5$; $f(x) = \alpha(\beta - x)$ si $5 \leq x \leq \beta$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

a) Determine α y β para que f sea una densidad de probabilidad continua

b) Calcule la probabilidad de que produzca al menos 7 toneladas, menos de 7, sabiendo que produjo más de 5.

c) Cuantas son las toneladas esperadas a producir en un día.

$$f(x) = \alpha x \, \mathbb{1}_{[0,5]}(x) + \alpha(\beta - x)\, \mathbb{1}_{[5,\beta]}(x)$$

① $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ② $f(5^+) = f(5^-)$

a) Por ②

$$f(5^-) = \alpha \cdot 5$$
$$f(5^+) = \alpha(\beta - 5) \Rightarrow \boxed{\beta = 10}$$

Reemplazando $\Rightarrow f(x) = \alpha x \, \mathbb{1}_{[0,5]}(x) + \alpha(10-x)\, \mathbb{1}_{[5,10]}$

Usando ①

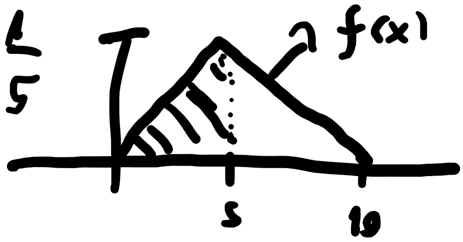
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = \int_0^5 \alpha x\,dx + \int_5^{10} \alpha(10-x)\,dx$$

$$= \frac{\alpha(25)}{2} + \cancel{-\frac{\alpha(10-10)^2}{2}}^{\,0} + \frac{\alpha(10-5)^2}{2}$$

$$= \alpha \cdot 25 \text{, pero tiene que ser } 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{25}$$

$$f(x) = \frac{x}{25}\, \mathbb{1}_{[0,5]}(x) + \frac{10-x}{25}\, \mathbb{1}_{[5,10]}$$



b) $P(X \geq 7) = \int_7^{\infty} f(x)\,dx = \int_7^{10} \frac{10-x}{25}\,dx$

$= -\frac{(10-x)^2}{50}\Big|_7^{10} = \frac{3^2}{50} = \frac{9}{50} \Rightarrow P(X<7) = \frac{41}{50}$

$P(X<7 \mid X\geq 5) \overset{def}{=} \frac{P(5\leq X<7)}{P(5\leq X)} = \frac{\int_5^7 \frac{10-x}{25}\,dx}{\frac{1}{2}}$ $\rightarrow$ Por dibujo

Probarlo con $\int dx$

$P(5\leq x<7) = -\frac{(10-x)^2}{50}\Big|_5^7 = -\left[\frac{9}{50} - \frac{25}{50}\right] = \frac{16}{50}$

$\Rightarrow P(X<7 \mid X\geq 5) = \frac{\frac{16}{50}}{\frac{1}{2}} = \frac{32}{50}$

c) $\boxed{E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(y)\,dy}$

En nuestro caso, reemplazamos

$E(X) = \int_0^5 x\left(\frac{x}{25}\right)dx + \int_5^{10} x\,\frac{(10-x)}{25}\,dx$

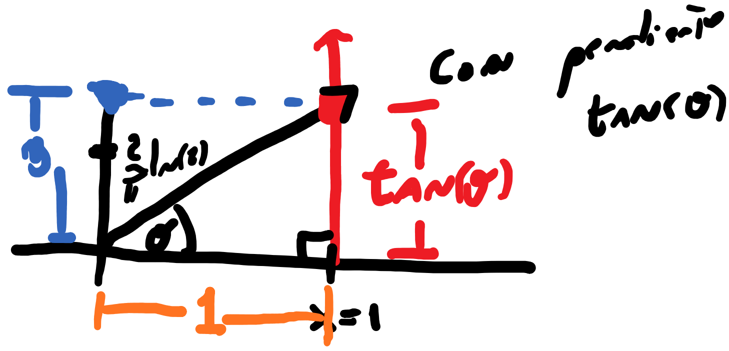
$=$ 45

$$= \boxed{\frac{455}{3} \text{ Toneladas}}$$

P3 Un auxiliar de MA3403, les pide a sus alumnos dibujar un octavo de circunferencia, posteriormente que escojan algún ángulo θ que este comprendido por este. El punto Y está determinado por la proyección en el eje Y de la intersección entre la recta que pasa por el origen, con pendiente $\tan(\theta)$ y la recta $x = 1$, a partir de la experiencia el ángulo parece estar distribuido uniformemente entre 0 y $\frac{\pi}{4}$. Determine la función de densidad de Y, y calcule la esperanza.

Obs: para el caso en se dibuja un cuarto de circunferencia no existe esperanza

$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$



$\theta \sim \text{Unif}[0, \frac{\pi}{4}]$

Nos preguntan f_Y, Idea buscar $g(\theta) = Y$

$\Rightarrow \underbrace{\tan(\theta)}_{g(\theta)} = Y$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

En este intervalo tan es invertible, estrictamente creciente.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'.$$

Usando esto $\sim$ $f_\theta(x) = \frac{4}{\pi} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{4}]}(x)$

$$f_Y(y) = \frac{4}{\pi} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{4}]}(\text{Arctan}(y)) \cdot (\text{Arctan}(y))'$$

$$= \frac{4}{\pi} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{4}]}(\text{Arctan}(y)) \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

$0 \leq \text{Arctan}(y) \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$

$$f_Y(y) = \boxed{\frac{4}{\pi} \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \frac{1}{1+y^2}}$$

Tarea probar $\boxed{\int f_Y(y)\,dy = 1}$

b) opción 1

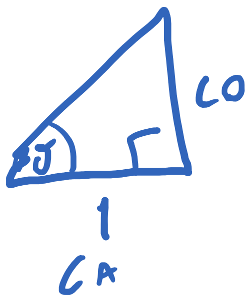
$E(Y) = E(g(\theta))$ (Hay formula)

Opción 2

$\int_0^1 \frac{4}{\pi} \frac{y}{1+y^2}\,dy = \{$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \, f_Y(y) \, dy = \int_0^1 \frac{4}{\pi} \frac{y}{1+y^2} \, dy = ?$$

Explicar parte 1



$$\tan(\theta) = \frac{CO}{CA} = \frac{CO}{1} = CO$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \, dy = \int_0^1 \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+y^2} \, dy = \frac{4}{\pi} \left(\arctan(y) \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \, f_Y(y) \, dy = \int_0^1 \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot \pi} \frac{2y}{1+y^2} \, dy = \frac{4}{2\pi} \cdot \ln(1+y^2) \Big|_0^1$$

$$= \boxed{\frac{2}{\pi} \ln(2)}$$

P4 En Economía se duce que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a X es:

Averso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$

Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$

Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$

Si $X \sim Unif(0,1)$ indique el tipo de agente si:

a) $U(t) = t^2$

b) $U(t) = ln(t)$

c) $U(t) = a + bt$

$E(x) = \frac{1}{2}$ (opción 1)

Opción 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

a) $U(t) = t^2 \Rightarrow U(E(x)) = \frac{1}{4}$

$$E(U(x)) = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} U(t) f_x(t)\,dt}$$ (Formula para cualquier $U(t)$)

Caso a)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}, \quad E(U(x)) \geq U(E(x))$$

$\boxed{F.R}$

b) $U(t) = \ln(t) \Rightarrow U(E(x)) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$E(U(x)) = \int_0^1 \ln(t) = 1 \cdot \ln(1) - 1 - (\underbrace{0 \cdot \ln(0) - 0}_{0})$$

$$= -1 < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$E(U(x)) < U(E(x))$$

A.R

c) $U(t) = a + bt \Rightarrow U(E(x)) = a + b\,E(x)$

$$= a + b\,\frac{1}{2}$$

$$E(U(X)) = E(a+bX) = \int_0^1 (a+bt)\,dt = a + \frac{b}{2} = U(E(x))$$

Opción 2 linealidad $\stackrel{\downarrow}{=} a\,E(1) + b\,E(x)$

$$= a + b\,E(x) = U(E(x))$$

$\Rightarrow$ N.R

Densidad Variables discretas

$$p_x = P(X=x)$$

$$\sum p_x = 1$$

CONTINUO $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \quad P(X > x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Función indicatriz

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$