MA3403-2. Probabilidades y estadística
Profesor: Raúl Gouet.
Auxiliares: Vicente Salinas y Javier Castro.
Fecha: 11 de Junio del 2020

Auxiliar 8

P1 *a)* Consideremos dos variables aleatorias $X \sim$ Binomial(r,p), $Y \sim$ Binomial(s,p). Supongamos que X,Y son independientes y definamos $Z = X + Y$. Demuestre que Z $\sim$Binomial$(s + r, p)$. **Indicación:** Puede utilizar que $\sum_{i\geq 0} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$

b) Consideremos dos variables aleatorias discretas X $\sim$Geom(p_1), Y $\sim$Geom(p_2).Supongamos que son independientes y definamos $Z = \text{mín}(X,Y)$. Demuestre que $Z \sim$ Geom(p), con p por determinar.

P2 Una empresa tiene una producción diaria de gas que puede modelarse matemáticamente mediante la v.a. X(en toneladas) absolutamente continua, con densidad $f(x) = \alpha x$ si $0 \leq x < 5$; $f(x) = \alpha(\beta - x)$ si $5 \leq x \leq \beta$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

a) Determine α y β para que f sea una densidad de probabilidad continua

b) Calcule la probabilidad de que produzca al menos 7 toneladas, menos de 7, sabiendo que produjo más de 5.

c) Cuantas son las toneladas esperadas a producir en un día.

P3 Un auxiliar de MA3403, les pide a sus alumnos dibujar un octavo de circunferencia, posteriormente que escojan algún ángulo θ que este comprendido por este. El punto Y está determinado por la proyección en el eje Y de la intersección entre la recta que pasa por el origen, con pendiente $\tan(\theta)$ y la recta $x = 1$, a partir de la experiencia el ángulo parece estar distribuido uniformemente entre 0 y $\frac{\pi}{4}$. Determine la función de densidad de Y, y calcule la esperanza.
Obs: para el caso en se dibuja un cuarto de circunferencia no existe esperanza

P4 En Economía se duce que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a X es:
Averso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$
Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$
Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$
Si $X \sim Unif(0,1)$ indique el tipo de agente si:

a) $U(t) = t^2$

b) $U(t) = ln(t)$

c) $U(t) = a + bt$

Resumen

X	Parámetros	Rango	Densidad
Bernoulli(p)	$p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$p_X(0) = 1-p,\ p_X(1) = p$
Binomial(n,p)	$n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$	$\{0,1,...,n\}$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$
Geométrica(p)	$p \in [0,1]$	$\{1,2,..\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$
Poisson(λ)	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Sea $X : \Omega \to R$ una v.a.
Caso discreto: $\mathbb{P}(X \in K) = \sum_{k \in K} \mathbb{P}(X = k)$
Caso continuo: $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx$, con f la función de densidad.
Definición Se define su función de distribución como $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$.
Si X es continua y tiene densidad f_X, su función de distribución corresponde a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$
Definición Si X es discreta y toma valores en K, se define su esperanza como $\mathbb{E}(X) := \sum_{k \in K} kP(X = k)$
Si X es continua con densidad f_X: $\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{x} y f_X(y)dy$ Para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y X v.a. discreta, se tiene que: $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in K} g(k)\Delta P(X = k)$. Análogo para X continua.
Si g es una función con inversa (muchas veces sera, monótona, pues esto implica invertible). $Y = g(X)$ cumple la siguiente igualdad para su función de distribución:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_{\mathbb{X}}(g^{-1}(-\infty, y])$$

En particular si g estrictamente creciente $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$ y por ende $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$.

[Propuesto]

Prop 1 Considere $X \sim$ Poisson(λ) y $Y \sim$ Poisson(μ) independientes

a) Pruebe que $X + Y \sim$ Poisson($\lambda + \mu$)

b) Pruebe que condicionando a $X + Y = n$, entonces $X \sim \text{Binomial}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$, es decir,

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\lambda}{1-\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

Prop 2 El consumo mensual de agua de una empresa, expresado en m^3, se puede modelar como una v.a. continua con densidad de probabilidad $f(x)$, dada por: $f(x) = Cx$ si $0 \leq x < 500$; $f(x) = C(1000 - x)$ si $500 \leq x < 1000$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

a) Determine C para que f sea una función de densidad.

b) Obtenga la función de distribución F

c) Calcular la probabilidad de que el agua consumida (en m^3) sea entre 250 y 750.

d) Calcule el consumo mensual esperado por la empresa.

Prop 3 Sea $\lambda > 0$ real. Considere la variable aleatoria continua X cuya densidad f_X satisface:

$$f_X(u) = \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda|u|}\text{para } u \in \mathbb{R}.$$

(conocida como doble exponencial de parámetro λ).

a) Pruebe que $\mathbb{E}(X) = 0$

b) Pruebe que $|X| \sim$ Exponecial(λ)

c) Sea $Y = signo(X)$. Pruebe que $Y \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$