Definición: Sean A,B eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilidad de A condicionado por B se define por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(B)}$$

Idea: Ahora B es el "nuevo espacio muestral" del problema

Ejemplo: Al lanza un dado equilibrado, se definen A:Obtener 2 al lanzar el dado, B:Obtener par al lanzar el dado y C: Obtener 3 al lanzar el dado

Intuitivamente $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{3}$ Como sabemos que es par, solo hay 3 casos (uno de ellos 2)

$\mathbb{P}(C|B) = 0$ Como sabemos que es par, no puede ser 3

Aplicando la formula $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

Aplicando la formula $\mathbb{P}(C|B) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0}{\frac{1}{2}} = 0$

P1 La cuarta parte de una población se vacuna para prevenir una enfermedad contagiosa. Durante la epidemia observamos que hay, entre los enfermos, un vacunado por cada cuatro no vacunados. Además, observamos que, entre los vacunados, uno de doce está enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de contagiarse para un individuo no vacunado?

$P(V) = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbb{P}(NV) = \frac{3}{4}$

$P(V|E) = \frac{1}{5} \Rightarrow \mathbb{P}(NV|E) = \frac{4}{5}$

$\mathbb{P}(E|V) = \frac{1}{12}$

$\mathbb{P}(E|NV) = ?$

Usando Bayes $\quad \mathbb{P}(E|NV) = \dfrac{\mathbb{P}(NV|E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(NV)} \quad (1)$

?

Usando prob totales

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|NV)\cdot P(NV) + \mathbb{P}(E|V)P(V) \quad (2)$

Llamando a $\mathbb{P}(E|NV) = x$ reescribiremos una ecuación

Por (1)

$x = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} P(E) =$ Reemplazando (2) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}}\left(x\,\frac{3}{4} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}x + \frac{16}{15}\,\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{16}{15}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow x = \dfrac{16}{3\cdot 12\cdot 4} = \dfrac{1}{9}$

P2 Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo. Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre es de un 99 % y la probabilidad de que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que, en general, la probabilidad de que sea hombre es 50 % y la probabilidad de que sea mujer también.

a) Si la ecografía predice que será mujer ¿Cuál es la probabilidad de que efectivamente lo sea?

b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

$$P(DH|H) = \frac{99}{100} \Rightarrow P(DM|H) = \frac{1}{100}$$

$$P(DM|M) = \frac{9}{10} \Rightarrow P(DH|M) = \frac{1}{10}$$

$$P(H) = P(M) = \frac{1}{2}$$

$P(M|DM) = ?$ Aplicando Bayes $$P(M|DM) = \frac{P(DM|M)\,P(M)}{P(DM)} \quad (1)$$

Prob totales

$$P(DM) = P(DM|M)\,P(M) + P(DM|H)\,P(H)$$

$$= \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{91}{100}\right)$$

Reemplazando en (1)

$$P(M|DM) = \frac{\frac{9}{\cancel{10}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{91}{10\cancel{0}}} = \frac{90}{91} \sim 1$$

Equivocarse $= \{\text{Hombre y dijo Mujer}\} \cup \{\text{Mujer y dijo Hombre}\}$

$$P(\text{Equivocarse}) = P(H\cap DM) + P(M\cap DH)$$

$$= P(DM|H)\,P(H) + P(DH|M)\,P(M)$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{11}{100}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{200}$$

P3 Una caja contiene n fósforos buenos y m fósforos malos. Un fósforo malo nunca enciende, mientras que un fósforo bueno enciende con probabilidad p cuando se intenta encenderlo una vez, y cada intento es independiente del resto. Usted escoge un fósforo al azar, y luego de k intentos aún no enciende.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el fósforo esté malo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el fósforo encienda en el intento k +1?

$$P(\text{Encender}|B)=p \Rightarrow P(\text{Encender } k|B)=p^k$$

$$P(M)=\frac{m}{n+m} \leadsto P(B)=\frac{n}{n+m}$$

a) $P(M|\text{No encendió } k \text{ veces})$

$$P(\text{Encender}|M)=0 \Rightarrow P(NE|M)=1$$

Usando bayes

$$P(M|NE,k)=\frac{P(NE,k|M)\cdot P(M)}{P(NE,k)}=\frac{P(M)}{P(NE,k)}\ ?$$

Usando prob totales

$$P(Ne,K)=P(NE,k|M)P(M)+P(NE,k|B)P(B)$$
$$=1\cdot\frac{m}{m+n}+(1-p)^k\frac{n}{m+n}=\frac{m+(1-p)^k n}{m+n}$$

Reemplazando

$$P(M|NE,k)=\frac{\frac{m}{m+n}}{\frac{m+n(1-p)^k}{m+n}}=\frac{m}{m+(1-p)^k n}$$

b) $P(E,k+1|NE,k)=\frac{P(E,k+1\cap NE,k)}{}$ Usando la definición

Usando totales

$$Np = P(\text{En en } k+1 \text{ y no en los } k|M)\cdot P(M)+$$
$$P(\ \text{"}\ |B)\cdot P(B)$$

$$\ldots = P(\,[illegible]\,|M)\cdot P(M) +$$

$$P(\,\text{''}\,|B)\cdot P(B)$$

$$= 0\cdot P(M) + p\,(1-p)^K \cdot P(B) = p(1-p)^K \frac{m}{m+N}$$

$$P(X) = \frac{p\left[(1-p)^K \frac{m}{m+N}\right]}{\frac{m+N(1-p)^K}{m+N}} = \boxed{\frac{p\,(1-p)^K m}{m+N(1-p)^K}}$$

P4 Cierta enfermedad se transmite en forma genética del siguiente modo:
Si sólo el padre presenta la enfermedad, el hijo tendría probabilidad a de presentarla.
Si sólo la madre presenta la enfermedad, el hijo tendría probabilidad b de presentarla.
Si ambos padres la presentan, el hijo la presentará con probabilidad 1.
Además, cada uno de los padres tiene probabilidad p de presentar la enfermedad, en forma independiente entre ellos.

a) Si una persona esta enferma. ¿Cual es la probabilidad de que la enfermedad le haya sido transmitida sólo por la madre?

b) Si hay dos hermanos, y uno de ellos esta enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hermano también este enfermo?