P1 Se tienen n urnas diferentes. Calcule de cuántas maneras diferentes se pueden colocar en ellas m bolas idénticas (con $n < m$):

a) Sin restricción alguna en cuanto al número de bolas en cada urna.

b) Si no puede haber ninguna urna vacía.

c) Si quedan exactamente $r, considere (0 < r \le n)$ urnas vacías.

a)

Cada dos palitos cerramos una urna

Pelotitas

Tenemos m puntitos rojos

Tenemos n+1 barras

Todas las opciones posible se dan revolviendo las barras interiores (n-1 barras) y los m puntitos rojos. Pues siempre tiene que haber una barra a cada extremo

Como se tienen para permutar n-1 objetos de un tipo 1 y m de un tipo 2 esto es permutación objetos repetidos

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{(n-1+m)!}{(n-1)!\, m!}$$

b) Si no puede haber ninguna urna vacía.

Al unir una pelotita en cada barra creamos los * y ahora solo nos quedan m-n pelotitas para revolver

Ahora es lo mismo que la parte a) pero con un nuevo m*=m-n

$$\binom{n-1+m-n}{m} = \binom{m-1}{m-n}$$

c)

Si quedan exactamente $r, considere (0 < r \le n)$ urnas vacías.

Primero escojamos los n-r urnas que contienen bolitas $= \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

Y ahora repartir las m bolitas en n-r urnas, con la condición de que haya al menos una bolita en cada una, pues son no vacías

$$= \binom{m-1}{m-(n-r)}$$

bolitas urnas

Notemos que es la parte b)

Formula de la b)

Finalmente tenemos que las combinaciones son: $\binom{n}{r}\binom{m-1}{m-(n-r)}$

P2 Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen 2 tipos de turnos, los n turnos de día y n turnos de noche, De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren el turno de día y $0 < b < n$ prefieren el de noche. El resto es indiferente para trabajar de día o de noche. Si los turnos se reparten al azar y solo uno por persona, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda un turno de su preferencia.

Los turnos son solo 2 tipo, día o noche

Vamos a buscar los casos totales y los casos favorables

Casos Totales:

Repartiremos los n turnos de día y los n restantes serán los que trabajen en la noche

Hay que escoger un grupo de tamaño n con 2n opciones $\binom{2N}{N}$

Con esto están listo los que trabajan de día y por ende los de noche, pues son el resto.

Casos Favorables:

Tiene que cumplirse que a trabajadores trabajan de día y b trabajadores de noche.

Fijamos a de día y b de noche, es decir nos quedaran solo 2n-a-b trabajadores para escoger los 2n-a-b turnos restantes.
Escojamos los n-a restante que trabajan de día, como tenemos 2n-a-b opciones restante (a+b ya tienen sus turnos fijos), esto es: $\binom{2N-a-b}{N-a}$

Con eso se completarían los n trabajadores de día y como los restantes trabajan de noche, estamos listo

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}} = \frac{\binom{2N-a-b}{N-a}}{\binom{2N}{N}}$$

$$\boxed{\text{Siempre} \quad \binom{N}{K} = \binom{N}{N-K}}$$

P3 Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Dos torres son indistinguibles si no puedo diferenciar a qué lado del tablero atacan, por lo tanto, es posible que se ataquen entre si.

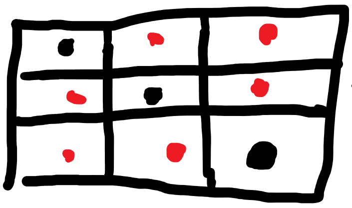
a) Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

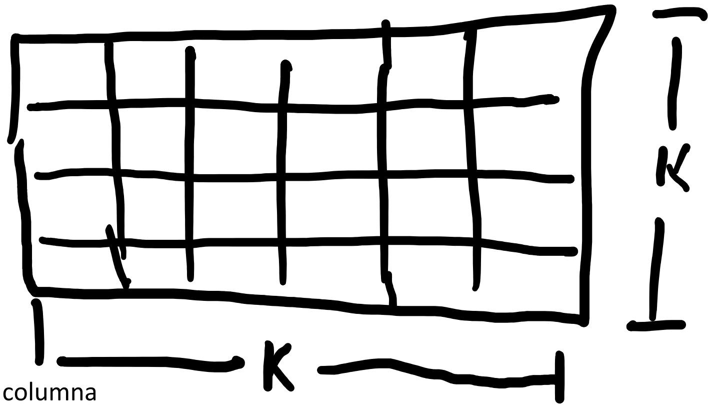
b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

c) Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero de $n \times m$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

Idea colocar una torre por cada fila

a)





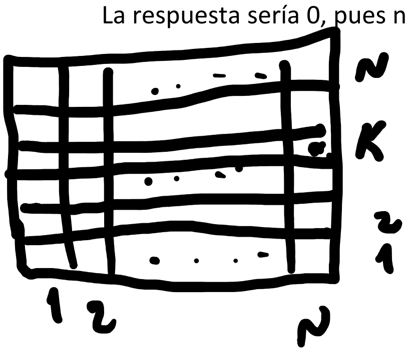
Primera torre fila 1

Se tienen k opciones, pues puede ir en cualquier casilla
Para la segunda habrá solo k-1, pues no puede ir en la misma columna que la primera.
Y en general cada vez se tendrá una opción menos a la anterior.
Entonces se tendrán K! opciones

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

Qué pasa si K>n? La respuesta sería 0, pues no pueden haber 2 en una misma fila

Si K<=n



Colocamos una torre en la primera fila, cuantas opciones tenemos? n
Para la segunda tendremos n-1 y así hasta n-k+1
Colocando la k-esima fila notamos que las ultimas n-k+1 filas están vacías

$$N-(K-1)=N-K+1$$

Para solucionar esto en vez de solo colocar en las primeras k filas, previamente escogeremos que k filas llevaran torres y luego será el mismo razonamiento
Esto nos dará $\binom{N}{K} \longrightarrow$ LAS K filas NO VACIAS

Ahora que ya escogimos las k filas se procede a colocar una torre por fila usando la idea de que en la primera hay n espacios en la segunda n-1 y en la k-esima n-k+1 opciones.

$$\frac{N!}{(N-K)!} = N(N-1)\ldots(N-K+1)$$

Finalmente el total de opciones es $\binom{N}{K}\frac{N!}{(N-K)!}$

c) es $\boxed{\binom{N}{K}\frac{m!}{(m-K)!} = \binom{m}{K}\frac{N!}{(N-K)!}}$