MA3403-2. Probabilidades y estadística
Profesor: Raúl Gouet.
Auxiliares: Vicente Salinas y Javier Castro.
Fecha: 23 de Abril del 2020

Auxiliar 4

P1 Se tienen n urnas diferentes. Calcule de cuántas maneras diferentes se pueden colocar en ellas m bolas idénticas (con $n < m$):

a) Sin restricción alguna en cuanto al número de bolas en cada urna.

b) Si no puede haber ninguna urna vacía.

c) Si quedan exactamente $r, considere(0 < r \leq n)$ urnas vacías.

P2 Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen 2 tipos de turnos, los n turnos de día y n turnos de noche, De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren el turno de día y $0 < b < n$ prefieren el de noche. El resto es indiferente para trabajar de día o de noche. Si los turnos se reparten al azar y solo uno por persona, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda un turno de su preferencia.

P3 Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Dos torres son indistinguibles si no puedo diferenciar a qué lado del tablero atacan, por lo tanto, es posible que se ataquen entre si.

a) Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

c) Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero de $n \times m$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

P4 Considere una urna con n elementos enumerados. Es decir, podemos considerar que nuestra urna es $A = \{1, ..., n\}$. Considere las siguientes situaciones:

a) Se eligen con reposición, independientemente y con ley equiprobable dos elementos x, y de A. Calcule $\mathbb{P}(x = y)$.

b) Se eligen un subconjunto B de A y un punto $x \in A$, con reposición, de manera independiente y equiprobable. (Note que la elección de B es con ley equiprobable en $\mathcal{P}(A)$. Calcule $\mathbb{P}(x \in B)$. **Indicación:** Puede usar sin demostrar que $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Resumen

Principio del Multiplicación: Si un hecho puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si una vez realizado este se sabe que otro hecho puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede realizarse ambos a la vez, en este orden, es $n_1 n_2$ maneras diferentes. En general $N_{total} = n_1 n_2 ... n_k$
Permutaciones Simples: Son las diferentes ordenaciones que pueden hacerse con n elementos distinguibles, de tamaño r, donde los objetos se pueden usar sólo una vez.

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Obs: Usualmente se le llama permutación al caso especial $r = n$ donde: $P_n = n!$
Permutaciones con elementos repetidos: Si se tienen n elementos divididos en k grupos, con n_i: cant. de objetos tipo i, tal que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El total de permutaciones posibles es: $\dfrac{n!}{n_1! n_2! .... n_k!}$
Combinaciones: Dada una agrupación de n elementos, la cantidad de subconjuntos de k elementos de dicha agrupación está dada por:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obs: El número total de subconjuntos no vacíos que se pueden formar es: $2^n - 1$
Combinaciones con repetición: La cantidad de formas de escoger un conjunto de k elementos dentro de un total de n con repetición está dada por:

$$C_{n-1+k}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

[Propuesto]

Prop 1 Calcule cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras $0, 1, ..., 9$, para los siguientes casos. Permitiendo repeticiones. Sin repeticiones. Si el último dígito debe ser 0 y no se permiten repeticiones.