Principio Multiplicativo aplicado

Se lanzan 2 dados distinguibles y equiprobables. Calcule la probabilidad de que uno sea par y el otro impar.

Casos totales: 6x6=36

Similar pero con el segundo

Para el primer dado existen 6 opciones

Casos favorables $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

Caso contrario

Segundo sea impar

Primero sea par

Probabilidad: $\frac{18}{36} = \frac{1}{2} = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$

Proposición 4. *Sean $a_1, ..., a_n$ n objetos diferentes. Entonces la cantidad de formas de elegir k objetos de los n anteriores viene dada por:*

	Con Orden	Sin Orden
Con Reposición	1 n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$ 3
Sin Reposición	2 $\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$ 4

1. Palabras de tamaño k, con n letras, es decir, hay n opciones para cada una de las k posiciones.
   Ejemplo: Con n colores pintar k cuadrados en fila.
2. Palabras de tamaño k, con n letras, sin repetirlas, es decir hay n opciones para la primera, n-1 para la segunda,… y n-k+1 para la última.
   Ejemplo: hacer filas de largo k con n personas
3. Para más adelante
4. Conjunto de tamaño k, con n elementos como opciones a elegir.
   Ejemplo: Armar un comité de tamaño k con n personas disponibles

$N! = N(N-1)(N-2)\cdots 1$

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

$\binom{N}{K} = \frac{N!}{(N-K)!\,K!}$, $0! = 1$

P2 Un grupo de 15 mujeres y 5 hombres se deben separar en dos grupos: 10 personas para el proyecto principal A y 10 para el proyecto secundario B. Además a cada proyecto debe asignar un jefe o jefa de proyecto de entre sus miembros.

a) ¿De cuantas maneras se puede asignar a las personas a los proyectos y sus jefaturas?

b) Si todas las asignaciones son igualmente probables, Calcule la probabilidad de que el proyecto principal no incluya hombres?

c) Calcule la probabilidad de que las dos jefaturas sean ocupadas por mujeres (**Hint**: Fije primero las jefaturas de cada proyecto).

Notemos que al escoger el grupo A, el cual tiene 10 personas (tamaño), entre las 20 disponibles (opciones). Nos queda un grupo de 10 personas restantes, el cual corresponde al grupo B.

Escoger el grupo A $\binom{20}{10}$ 20 → Opciones, 10 → Tamaño

Escoger el grupo B
Se puede omitir $\boxed{\binom{10}{10} = 1}$

El jefe o jefa de A 10 Solo se tiene las 10 opciones de los integrantes del grupo A

El jefe o jefa de B 10 Solo se tiene las 10 opciones de los integrantes del grupo B

Usando el principio multiplicativo: Casos Totales $\binom{20}{10} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = \binom{20}{10} 10^2$

Opción 2 $\underbrace{20}_{\text{Jefe A}} \cdot \underbrace{19}_{\text{Jefe B}} \cdot \binom{18}{9}$ → Escoger los dos grupos de tamaño 9, con los 18 disponibles

b) Si todas las asignaciones son igualmente probables, Calcule la probabilidad de que el proyecto principal no incluya hombres?

Escogemos el grupo A, solo consideramos a las mujeres como opciones (15) y el tamaño se mantiene en 10 $\binom{15}{10}$ 15 → Opciones, 10 → Tamaño

Escoger el jefa de A 10 Escoger entre las 10 integrantes de A

Escoger el jefe o jefa de B 10 Escoger entre las 10 integrantes de B

Usando el principio multiplicativo $\binom{15}{10} 10 \cdot 10 = \text{Casos Favorables}$

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}} = \frac{\binom{15}{10} \cancel{10^2}}{\binom{20}{10} \cancel{10^2}}$$

c) Calcule la probabilidad de que las dos jefaturas sean ocupadas por mujeres (**Hint**: Fije primero las jefaturas de cada proyecto).

Escoger jefa del A 15 opciones Cualquiera de las 15 mujeres

Escoger jefa del B 14 opciones Cualquiera de las 14 mujeres, pues una ya está en el grupo A

Escoger el resto del grupo A $\binom{18}{9}$

18 personas restantes, pues pueden ser mujeres u hombre

Tamaño restante del ´proyecto

Usando el principio multiplicativo

Casos Favorables $\binom{18}{9} 15 \cdot 14$

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}} = \frac{\cancel{\binom{18}{9}} \cdot \cancel{15}^{3} \cdot \cancel{14}^{7}}{\cancel{\binom{18}{9}} \cdot \cancel{20}^{\cancel{4}^{2}} \cdot 19} = \boxed{\frac{21}{38}}$$

Opción 2

P1 Un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ se dice egocéntrico si $|A| \in A$. Por ejemplo, el conjunto $\{2,7\}$ es egocéntrico, mientras que el conjunto $\{1,3\}$ no lo es.

a) Dado $k \in \mathbb{N}$. Calcule el número de conjuntos egocéntricos $A \subseteq \{1,..,n\}$ de cardinal $k \le n$.

b) Muestre que el cardinal del conjunto de egocéntricos $A \subseteq \{1,..,n\}$ es 2^{n-1}.

$K=1 \Rightarrow \{1\}$

Solo sirve el 1, pues es el único de tamaño 1 que contiene al 1

$K=2 \Rightarrow \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \ldots, \{2,N\}$

Hay n-1 elementos para acompañar al 2, pues no se puede repetir el 2

Como son conjuntos, los elementos no tienen orden entre ellos y tampoco se pueden repetir, por lo tanto el $\cancel{\{2,2\}}$ No existe

$k=3 \Rightarrow \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,5,7\}, \ldots \{3,N-1,N\}$

Notar que todos tienen el 3 y son de tamaño 3. Los podemos ver como:

$\{1,2,3\} \rightarrow 3$ y $\{1,2\}$

$\{2,3,4\} \rightarrow 3$ y $\{2,4\}$

$\{3,5,7\} \rightarrow 3$ y $\{5,7\}$

Todos tienen el tres y otros dos elementos que corresponden conjuntos de tamaño 2 y con n-1 opciones para sus elementos.

$$\binom{N-1}{2}$$

$$K \Rightarrow \underbrace{\{\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\cdot,K,\cdots\}}_{\text{Tamaño K}}$$

Cuando sacamos el K, nos quedan conjuntos de tamaño k-1 y están formados por números distintos de K, es decir, n-1 opciones.

$$\binom{N-1}{K-1}$$

$N-1 \rightarrow$ Números distintos de K

$K-1 \rightarrow$ Escoger los k-1 elementos restantes del conjunto (distintos de k y entre ellos).

b)
$$\sum_{k=1}^{N} \binom{N-1}{K-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{K} = (1+1)^{N-1} = 2^{N-1}$$

Recordar

$k=1$ $k=0$

Recordar

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}=(x+y)^{n}$$

P3 Sea $I_n = \{1, ..., n\}$. Se saca un conjunto A del conjunto de partes $\mathcal{P}(I_n)$ de manera equiprobable.

a) Calcule $\mathbb{P}(\{A\})$

b) Sean $n = 4$, $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4\}$, sea $C = A \cup B = \{1,2,3,4\}$, es cierto que: $\mathbb{P}(\{A\}) + \mathbb{P}(\{B\}) = \mathbb{P}(\{C\})$, se contradice alguna propiedad?

$$\mathcal{P}(I_n) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \{1,2\}, \boxed{A}, \{1,2,3\}, \ldots, \underbrace{\{1, \ldots, n\}}_{I_n}\}$$

$\{1\}$ Es un conjunto del conjunto de las partes $\in \mathcal{P}(I_n)$

$L = \{\{1\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}(I_n)$

$M = \{\emptyset, \{1\}\}$ "

$N = \{\emptyset, \{3\}\}$ "

$L \cap M = \{\{1\}\}$

$L \cap N = \emptyset$

$M \cap N = \{\emptyset\}$

$$\mathbb{P}(\{A\}) = \frac{1}{|\mathcal{P}(I_n)|}, \quad \mathbb{P}(\{\emptyset, \{1\}\}) = \frac{2}{|\mathcal{P}(I_n)|}$$

Opción 1

En intro al algebra se enseña que: $|\mathcal{P}(B)| = 2^{|B|}$

$$\mathbb{P}(\{A\}) = \frac{1}{|\mathcal{P}(I_n)|} = \frac{1}{2^{|I_n|}} = \frac{1}{2^n}$$

Opción 2

Los subconjuntos de I_n, se pueden codificar como n-tuplas, las cuales en sus componentes solo tienen 1 o 0. El 1 representa que el elemento está en el conjunto y el 0 que no,

$\{1,2\} \longrightarrow (1,1,0,0,\ldots,0)$

$\{1,3\} \longrightarrow (1,0,1,0,\ldots,0)$

$\emptyset \longrightarrow (0, \ldots, 0)$ Puros ceros

$I_n \longrightarrow (1,1,1,\ldots,1)$ Puros unos

$|\mathcal{P}(I_n)| = \#$ n-tuplas ... $= 2^n$ Porque en cada componente hay 2

$|\mathcal{P}(I_n)| = \#$ n-tuplas con 0 o 1 $= 2^n$

Porque en cada componente hay 2 opciones

Reemplazando

$$\mathbb{P}(\{A\}) = \frac{1}{2^n}$$

b) Sean $n = 4$, $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4\}$, sea $C = A \cup B = \{1,2,3,4\}$, es cierto que: $\mathbb{P}(\{A\}) + \mathbb{P}(\{B\}) = \mathbb{P}(\{C\})$, se contradice alguna propiedad?

$A \in \mathcal{P}(I_n)$

$B \in \mathcal{P}(I_n)$

$C \in \mathcal{P}(I_n)$

Por parte a), cualquier conjunto D que pertenezca a las partes de I_n, cumple que: $\mathbb{P}(\{D\}) = \frac{1}{2^n}$

$\mathbb{P}(\{A\}) = 1/2^n = \frac{1}{2^4}$

$\mathbb{P}(\{B\}) = 1/2^n = \frac{1}{2^4}$

$\mathbb{P}(\{C\}) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^4}$

$\{A\} \cap \{B\} = \emptyset$

$\{\{1,2\}\} \cap \{\{3,4\}\}$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{P}(I_n))}_{1} = 0$

¿ $\{A\} \cup \{B\} = \{C\}$? No es $\{A, B\}$

$\{\{1,2,3,4\}\}$ $\quad \{\{1,2\},\{3,4\}\}$

Lo que es cierto es: $\mathbb{P}(\{A\}) + \mathbb{P}(\{B\}) - \mathbb{P}(\underbrace{\{A\} \cap \{B\}}_{\emptyset}) = \mathbb{P}(\underbrace{\{A\} \cup \{B\}}_{\{A,B\}})$

Tienen una sola opción

El vacío siempre tiene probabilidad 0

Se cumple ✓

$$\boxed{\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} - 0 = \frac{2}{2^4}}$$

Tiene 2 opciones

Obs $\mathbb{P}(\{\emptyset\}) = \frac{1}{2^n} \neq \mathbb{P}(\emptyset) = 0$