MA2601-5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Roberto Morales
Auxiliares: Rolando Rogers - Rondrigo Maulen
Fecha: 22 de Junio de 2020.

Auxiliar 9

Preguntas

P1 Sea $\beta \neq 0$ y considere

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Calcule e^{At} usando que $At = PDtP^{-1}$ y que $e^{PDtP^{-1}} = Pe^{Dt}P^{-1}$

P2 *a)* Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ una matriz diagonalizable, sea λ un valor propio y v su respectivo vector propio asociado. Pruebe que $e^{\lambda t}$ y v son respectivamente valor y vector propio de la matriz e^{At}

b) Considere el problema de valor inicial

$$X' = AX$$
$$X(0) = X_0$$

Muestre que si todos los valores propios de A tienen parte real negativa entonces $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$$

P3 [**Control 3, 2016**] Nos situamos en un futuro lejano, la humanidad ha logrado un equilibrio ambiental de modo que la población total de humanos es H_0, en este momento, una manipulación genética fallida genera una enfermedad que ataca a los humanos transformándolos en zombies y que eventualmente los lleva a la muerte. El problema de esta extraña enfermedad, es que los muertos no permanecen en dicho estado y pueden volver como zombies. El sistema puede ser descrito mediante el set de ecuaciones:

$$\begin{aligned} H'(t) &= (\alpha_1 - \alpha_2)H(t), & H(0) = H_0 \\ Z'(t) &= \alpha_2 H(t) - \alpha_3 Z(t) + \alpha_4 D(t), & Z(0) = 0 \\ D'(t) &= \alpha_3 Z(t) - \alpha_4 D(t), & D(0) = 0 \end{aligned}$$

con α_1 la tasa de nacimiento de humano, α_2 la tasa de humanos que se contagian de la enfermedad, α_3 la tasa de enfermos que mueren y α_4 la tasa de muertos que vuelven en estado zombie.

a) Escriba el sistema anterior de manera matricial, es decir, identifique el vector de estado X y la matriz del sistema A, de modo que se escriba por

$$X' = AX$$

b) Asuma que $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$ y que α_1 es despreciable en comparación a α. Calcule la matriz exponencial asociada a A y la solución del sistema. Explique que sucede con las distintas poblaciones cuando $t \to +\infty$

Hint: Considere que $exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha t & 0 & \alpha t \\ 0 & \alpha t & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sinh(\alpha t) & cosh(\alpha t) & sinh(\alpha t) \\ cosh(\alpha t) - 1 & sinh(\alpha t) & cosh(\alpha t) \end{pmatrix}$

c) Bajo el supuesto $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$, reduzca el sistema a otro set de solo dos ecuaciones, donde una variable sea $H(t)$ y la otra $W(t) := Z(t) + D(t)$. Resuelva este nuevo sistema y concluya que sucede con esta población cuando $t \to +\infty$