MA2601-5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Roberto Morales
Auxiliares: Rolando Rogers - Rodrigo Maulen
- .
Fecha: 20 de Abril de 2020.

Auxiliar 3

Resumen

TEU Global

Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, tal que

(i) f es continua en I

(ii) f es Lipschitz con respecto a su segunda variable, es decir $\exists L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \ \forall t \in I, \ y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

Luego la EDO

$$y' = f(t, y), \ y(t_0) = y_0$$

tiene una solución unica de clase $\mathcal{C}^1(I)$.

TEU Local

Si tenemos la EDO $y(t) = f(t, y), y(t_0) = y_0$, luego si f satisface:

(i) f es continua con respecto a t.

(ii) $\exists \delta, r, K > 0$ tal que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$ para todo $y_1, y_2 \in (y_0 - r, y_0 + r), \ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Entonces existe una única solución de la EDO de clase $\mathcal{C}^1$ definida en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Preguntas

P0 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Muestre que si $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en algún conjunto compacto (cerrado y acotado) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ entonces f es Lipschitz en la segunda variable dentro del conjunto Ω.

P1 Considere el problema de valores iniciales

$$y' = \frac{(y^4 + 1)^{\frac{1}{5}}}{x^2 + 1}$$
$$y(1) = 0$$

Demuestre que existe una única solución definida para todo $x \in \mathbb{R}$

P2 Se ha determinado experimentalmente que la variación del tamaño en el diámetro (y) del tronco de un árbol (en función del tiempo), varía según el siguiente modelo. Sea $a > 0, b < 0$

$$y' = 3ay^{2/3} + 3by$$
$$y(0) = 0$$

Determine la solución particular de $y(t)$. ¿Contradice esto al TEU?

P3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua en la primera variable y con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua. Además existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c, y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$. Consideremos ahora

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Muestre que si

- $y_0 < c$ entonces $y(t) < c$
- $y_0 > c$ entonces $y(t) > c$