Auxiliar 14

Javier Monreal

Julio 2020

P1

Tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x^2 - xe^{y+1} \\ y' = y^2 + 2y - xy, \end{cases}$$

por lo que identificamos $F(x, y) = x^2 - xe^{y+1}$,
$G(x, y) = y^2 + 2y - xy$. Para encontrar los valores $(\bar{x}, \bar{y})$ tales que
$F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, nos ponemos en casos y resolvemos:
$x = 0, y = 0$: tal caso notamos que, en efecto
$F(x, y) = G(x, y) = 0$, por lo que el punto $(0, 0)$ es punto critico.

P1 Identifiquemos los puntos críticos.

$x \neq 0, y = 0$: En tal caso la primera ecuación se convierte en $x - e = 0$, por lo que el punto critico asociado aquí es solamente $(e, 0)$.
$x = 0, y \neq 0$: Obtenemos en la segunda ecuación $y = -2$, por lo cual el punto critico aquí es $(0, -2)$.
$x \neq 0, y \neq 0$ En este caso, al combinar ambas ecuaciones llegamos a $e^{y+1} - (y + 2) = 0$, que posee como única solución $y = -1$ (ser única solución es verificable, pues posee segunda derivada positiva y por lo tanto es mínimo global), por lo que obtenemos también x=1.
Los puntos que hemos encontrado han sido $(0, 0), (e, 0), (0, -2), (1, -1)$.

P1 Veamos si son aislados o no.

Para esto verificamos el valor del determinante del Jacobiano en cada uno de los puntos:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - e^{y+1} & -xe^{y+1} \\ -y & 2y + 2 - x \end{pmatrix},$$

por lo que obtenemos:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

con determinante distinto de cero, por lo tanto $(0,0)$ es punto aislado.

$$J(e,0) = \begin{pmatrix} e & -e^2 \\ 0 & 2 - e \end{pmatrix},$$

con determinante distinto de cero, por lo tanto el punto $(e,0)$ también es punto aislado.

P1 Veamos si son aislados o no.

$$J(0,-2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

por lo cual (0,-2) es también un punto aislado.

$$J(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

notemos que esta matriz posee determinante cero, por lo cual el punto no puede clasificarse como aislado mediante este método.

P1 Clasifiquemos y esbocemos localmente estos puntos aislados.

Para poder hacer esto necesitamos calcular los valores y vectores propios de los jacobianos asociados a cada punto critico:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios $\lambda_1 = -e, \lambda_2 = 2$ con vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente. En este caso tengo que los signos de los valores propios distintos, por lo cual obtengo un punto silla (las lineas entran por el vector propio asociado al valor propio negativo, y salen por el vector asociado al valor propio positivo).

P1, clasifiquemos y esbocemos localmente estos puntos aislados.

$$J(e,0) = \begin{pmatrix} e & -e^2 \\ 0 & 2-e \end{pmatrix},$$

posee como valores propios $\lambda_1 = e, \lambda_2 = 2 - e$ y vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2e-2}{e^2} \end{pmatrix}$ respectivamente. Una vez mas obtengo valores propios con signos diferentes, por lo cual obtengo al igual que antes, un punto silla.

P1, clasifiquemos y esbocemos localmente estos puntos aislados.

$$J(0,-2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

esta matriz posee valores propios $\lambda_1 = -\frac{1}{e}, \lambda_2 = -2$, con vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2-(1/e)}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Dado que en este caso ambos valores propios poseen signos negativos, el punto critico en este caso es un nodo en el cual las lineas entran.