P1 ⓐ $x'(t) = x - y - 2 \qquad y'(t) = y^2 - (x+1)^2$

Buscamos los ptos críticos aislados y estudiamos si son nodos o ptos silla.

Para ver los $(\bar{x}, \bar{y})$ que sean ptos críticos, deben satisfacer

$$\wedge \begin{array}{ll} \text{i)} & x - y - 2 = 0 \\ \text{ii)} & y^2 - (x+1) = 0 \end{array}$$

de i) $\boxed{y = x - 2}$

en ii) $(x-2)^2 - (x+1)^2$

$$= \cancel{x^2} - 4x + 4 - \cancel{x^2} - 2x - 1$$

$$= -6x + 3$$

$$\Rightarrow -6x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1/2}$$ y en •

• $\Rightarrow y = 1/2 - 2$

$$\Rightarrow \boxed{y = -3/2}$$

Así $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/2, -3/2)$ es el único pto crítico del sistema y por eso es aislado

Estudiemos la naturaleza a través del Jacobiano

$$(SL)\begin{cases} x' = \frac{\partial F}{\partial x}(1/2,-3/2)x + \frac{\partial F}{\partial y}(1/2,-3/2)y \\ y' = \frac{\partial G}{\partial x}(1/2,-3/2)x + \frac{\partial G}{\partial y}(1/2,-3/2)y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -2(1/2+1)\,x + 2(-3/2)y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x + -3y \end{cases}$$

Así $J(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

donde la traza se determina como

$$tr(J) = 1 + -3 = -2$$

y el determinante

$$\det(J) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -3\cdot 1 - (-1)(-3)$$
$$= -3 - (3) = -6$$

Así, del enfoque traza-determinante el pto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto silla ■

---

b) $$\begin{cases} x'(t) = \mu x(t) + y(t) - x f(r(t)) \\ y'(t) = -x(t) + \mu y(t) - y f(r(t)) \\ r(t) = (x(t)^2 + y(t)^2)^{1/2} \end{cases}$$

$\mu \in \mathbb{R}$, $f(r)$ continua estrictamente creciente y tq $f(0) = 0$.

i) (Se parece al aux 15). Primero veamos que el origen es pto fijo del SNLA.

Veamos que es pto crítico.

$$\begin{cases} \mu \cdot 0 + 0 - 0 \cdot f(r) = 0 \checkmark \\ -0 + \mu \cdot 0 - 0 \cdot f(r) = 0 \checkmark \end{cases}$$

Además, $r(t) = (x(t)^2 + y(t)^2)^{1/2}$

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow 2r(t) r'(t) = 2x'(t) x(t) + 2y'(t) y(t)$$

$$\Rightarrow r(t)r'(t) = x'(t)x(t) + y'(t)y(t)$$

Reemplazo x', y' del enunciado

$$\Rightarrow r(t)r'(t) = (\mu x(t) + y(t) - x f(r(t)))x(t) + (-x(t) + \mu y(t) - y f(r(t)))y(t)$$

$$\Rightarrow r r' = \mu x^2 + \cancel{xy} - x^2 f(r) - \cancel{xy} + \mu y^2 - y^2 f(r)$$

$$\Rightarrow r r' = \mu [x^2 + y^2] - f(r)[x^2 + y^2]$$

y como $r^2 = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow r r' = \mu r^2 - f(r) r^2$$

$$\Rightarrow r'(t) = \mu r(t) - f(r(t)) r(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{r'(t) = r(t)(\mu - f(r(t)))}$$

Ahora de $\theta(t) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Big/ \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \theta'(t) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y'(t)}{x} - \frac{y}{x^2} x'(t)\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{y'(t)}{x} - \frac{y x'(t)}{x^2}\right)$$

$$\theta' = \frac{y'x - y x'}{r^2}$$

reemplazando y' e x' del enunciado

$$\Rightarrow \theta' = \frac{(-x + \mu y - f(r) y)x - y(\mu x + y - x f(r))}{r^2}$$

$$= \frac{-x^2 + \cancel{\mu y x} - \cancel{f(r) y x} - \cancel{y \mu x} - y^2 + \cancel{x y f(r)}}{r^2}$$

$$= \frac{-(x^2+y^2)}{r^2} = \frac{-r^2}{r^2} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta'(t) = -1}$$

Con $x(t), y(t)$ soluciones del SNLA.

Luego, la trayectoria de una solución estacionaria (del tipo $y(t)=y(t_0)$ para todo t) es un punto de $\mathbb{R}^2$ que se denomine punto fijo o punto crítico. del sistema de ecuaciones diferenciales

Por tanto, si hubiera otro punto fijo $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0,0)$, al usar el cambio de variables a cilíndricas existiría un $(\bar{r}, \bar{\theta})$ que sigue siendo pto crítico en este sist. de coordenadas, pero $\theta'(t) \neq 0 \; \forall t$ lo que generaría una contradicción y por tanto no pueden haber otros puntos críticos aparte de $(0,0)$

Así $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ es el único punto fijo ■

ii) Si $\mu \leq 0$, debemos ver que $(0,0)$ es espiral asintóticamente estable y bosquejar un diagrama de fases.

Tenemos nuestro SNLA

$$(SNLA) \begin{cases} x'(t) = \mu x(t) + y(t) - x f(r(t)) \\ y'(t) = -x(t) + \mu y(t) - y f(r(t)) \end{cases}$$

Linealizando,

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y \\ y'(t) = \frac{\partial G}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial G}{\partial y}(0,0)y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SL) \begin{cases} x' = [\mu - f(r(t))]x + [1]y \\ y' = [-1]x + [\mu - f(r(t))]y \end{cases}$$

Cuyo Jacobiano se define como

$$J(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} \mu - f(r(t)) & 1 \\ -1 & \mu - f(r(t)) \end{pmatrix}$$

y su determinante es

$$\det(J) = [\mu - f(r(t))]^2 + 1 = 0$$

Veamos los v.p

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \mu - f(r(t)) - \lambda & 1 \\ -1 & \mu - f(r(t)) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= [\mu - f(r(t)) - \lambda]^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \mu - f(r) - i \\ \lambda_2 = \mu - f(r) + i \end{matrix}$$

> complejos con parte real negativa

$\Rightarrow$ El pto crítico es un espiral estable asintótico ■

$\boxed{\text{Otra forma}}$

Definir $V(x,y)=x^2+y^2$

Con $(\mu x+y-xf(r))\frac{\partial V}{\partial x}+(-x+\mu y-yf(r))\frac{\partial V}{\partial y}$

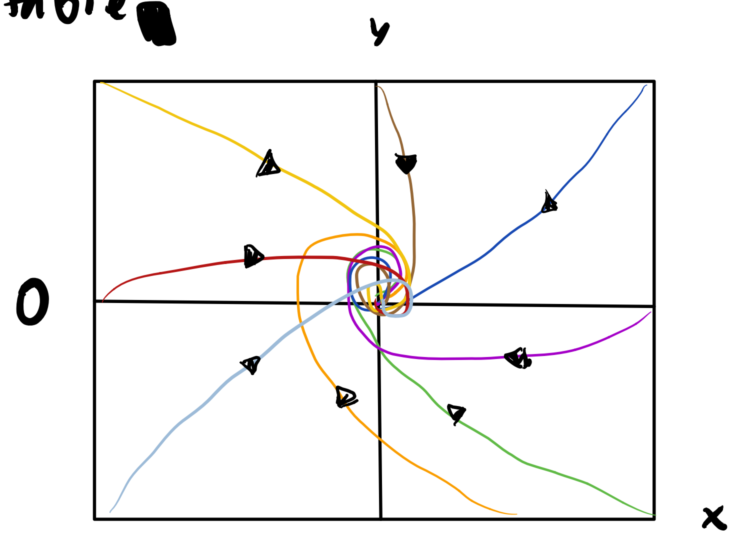
$$=2(x^2+y^2)(\mu-f(r))$$

que si $\mu\geq 0$ $\forall (x,y)\neq 0$

$$\rightarrow (\mu x+y-xf(r))\frac{\partial V}{\partial x}+(-x+\mu y-yf(r))\frac{\partial V}{\partial y}\leq -2rf(r)<0$$

Así V es efectivamente una función de Lyapunov estricta y como

$r'(t)\leq 0$ $\quad\theta'(t)=-1$ por el teorema de Lyapunov todas las trayectorias convergen al origen y lo hacen con vel angular -1 cte. Así el origen es un espiral estable ■



el diagrama uwu

0

iii) Si $\mu > 0$

① Demostrar que existe un único recorrido ℓ tq $r'(t)=0$, el cual es una circunferencia de radio r_c.

② Muestre que

$$\begin{cases} r(\mu - f(r)) > 0 & \forall r \in [0, r_c) \\ r(\mu - f(r)) < 0 & r > r_c \end{cases}$$

③ Si las trayectorias que se intersectan comparten el mismo recorrido, deduzca que cualquier trayectoria tq

$$0 < x(t=0)^2 + y(t=0)^2 < r_c^2$$

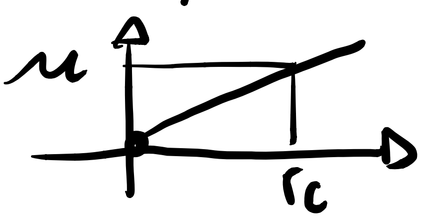
es tal que $r'(t)$ $\forall t \geq 0$. Del mismo modo, si

$$x(t=0)^2 + y(t=0)^2 > r_c^2$$

entonces $r'(t) < 0$ $\forall t \geq 0$.

④ Bosqueje un diagrama de fases para el (SNLA)

Como f es estrictamente creciente, regular y $f(0)=0$, existirá un único r_c tq $f(r_c)=\mu$



(pues si $r = r_c$, $r'(t)=0$)

Además, del SNLA en cilíndricos

$$\begin{cases} r' = r(\mu - f(r)) & (1) \\ \theta' = -1 & (2) \end{cases}$$

De (2) $\Rightarrow$ $\theta(t) = -t + \theta_0$, θ_0 c.i

y como $\frac{y}{x} = \tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\left.\begin{array}{l} x = r_c \cos(\theta_0 - t) \\ y = r_c \sin(\theta_0 - t) \end{array}\right\}$$ sol del SNLA con recorrido como circunferencia de radio r_c.

Así como r_c es único, el recorrido es único.

Por otro lado, usando que f es creciente, podemos ver que para $r \in (0, r_c)$

$$r(\mu - f(r)) > r(\mu - f(r_c)) = 0$$

y si $r > r_c$

$$\Rightarrow r(\mu - f(r)) < r(\mu - f(r_c)) = 0$$

Para finalizar, si asumimos que la c.i es tal que

$$0 < r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 < r_c^2$$

Si existe un $t^* > 0$ tq

$$x(t^*)^2 + y(t^*)^2 > r_c^2$$

Entonces por continuidad existiría un instante t^* tq $r(t_2) = r_c$. Así, el recorrido sería asociado a la circunferencia $\mathcal{C}$, pero esto contradice que la trayectoria comienza en algún punto tq $r_0 < r_c$.

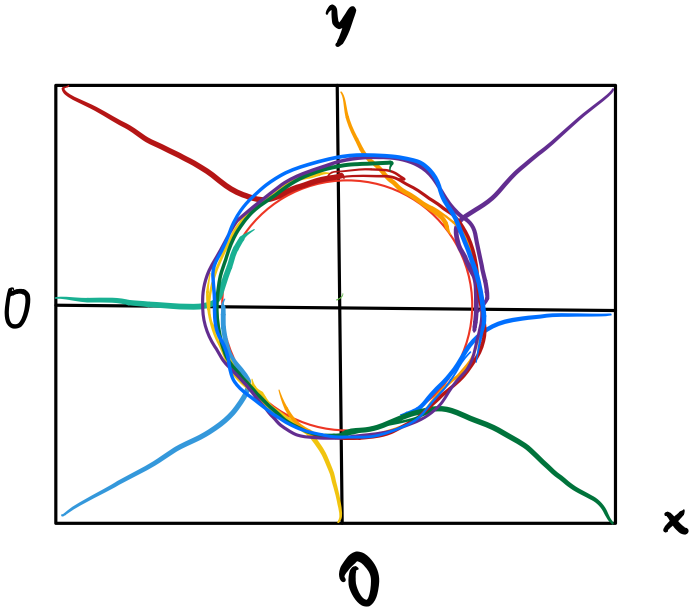
Así $r'(t) > 0 \ \forall t \geq 0$.

Del mismo modo si
$r_0^2 = x^2(t=0) + y^2(t=0)^2 > r_c^2$
si existe un t^{**} tq

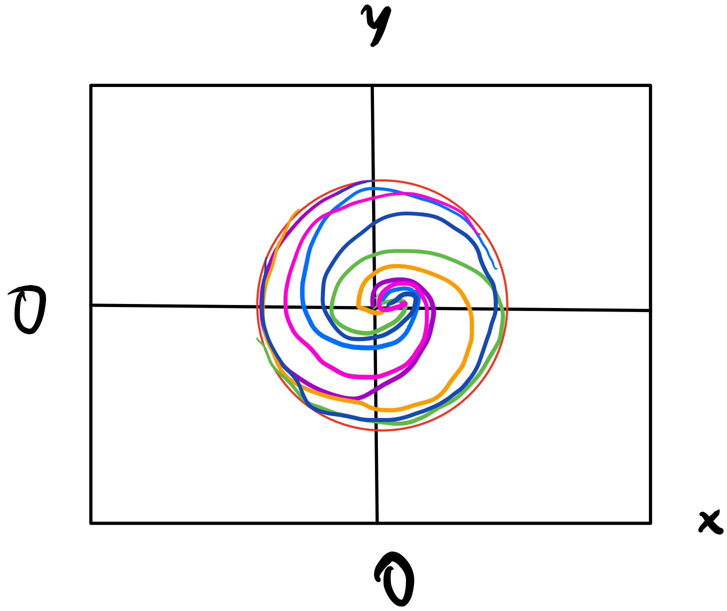
$$x^2(t^{**}) + y^2(t^{**}) < r_c^2$$

Entonces por continuidad existiría un instante t^{**} tq $r(t_2) = r_c$. Así, el recorrido sería asociado a la circunferencia $\mathcal{C}$, pero esto contradice que la trayectoria comienza en algún punto tq $r_0 > r_c$.

Así, $r'(t) < 0 \ \forall t \geq 0$



$r \in (0, r_c)$



$r > r_c$

Apuntes AUX Examen

P2 Como $(\bar{x},\bar{y})$ es punto de mínimo estricto de H, entonces por condiciones necesarias de optimalidad se tiene que

$$\nabla H(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\bar{x},\bar{y})}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} H(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ F_2(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\bar{x},\bar{y}) \text{ es punto crítico.}$$

Luego, H es función de Lyapunov ssi

$$\underbrace{\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}}_{= F_2(x,y)} F_1(x,y) + \underbrace{\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}}_{= -F_1(x,y)} F_2(x,y) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H(x,y)}{\partial x} F_1(x,y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) F_2(x,y) = F_2(x,y) \cdot F_1(x,y) - F_1(x,y) F_2(x,y)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ es función de Lyapunov → ya que también $H(\bar{x},\bar{y}) = 0$ y $H(x,y) \geq 0$ $\forall x,y$ por enunciado.

$\Rightarrow$ es estable (pero no es asintóticamente estricta ya que H no es Lyapunov estricta)

P3

Notemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_{3\times3}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{= N}$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{(I_{3\times3} + N)t} = e^{I_{3\times3}t} \cdot e^{Nt}$$

$$e^{I_{3\times3}t} = I_{3\times3} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} I_{3\times3} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

→ matriz de 0's.

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tN)^k}{k!}$$; veamos si $\exists k_0$ tq $N^{k_0} = 0_{3\times3}$

$\underline{k=2)}$ $N \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{k=3)}$ $N^3 = N^2 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow N^3 = 0_{3\times3}$$

Luego, $\forall k > 3$, $N^k = N^{k-3} \cdot \underbrace{N^3}_{=0} = 0_{3\times3}$

$$\Rightarrow e^{\Pi t} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(t\Pi)^K}{K!}$$

$$= I_{3\times 3} + \frac{t\Pi}{1!} + \frac{t^2\Pi^2}{2!}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2t & 4t \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2t & 4t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{I_{3\times 3}t} \cdot e^{\Pi t}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2t & 4t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (4t+2t^2)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Luego, el sistema $\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

tiene solución

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int e^{(t-s)} b(s)\, ds$$

y $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x(t) = \int e^{(t-s)} b(s)\, ds \quad ; \quad b(s) = \begin{pmatrix} e^{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int \begin{pmatrix} e^{t-s} & 2(t-s)e^{t-s} & (4(t-s)+2(t-s)^2)e^{t-s} \\ 0 & e^{t-s} & 2(t-s)e^{t-s} \\ 0 & 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= \int \begin{pmatrix} \overbrace{e^{t-s}}^{e^{t-s}} \cdot e^{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} te^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} te^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad //$$