MA2601-3 Ecuaciones diferenciales ordinarias.
Profesor: Axel Osses.
Auxiliares: Fernanda Blanc, Benjamín Jauregui.
Fecha: 20 de julio de 2020.

Auxiliar 14: SNLA - Adiós, vaquero

Definición 1. Considere el sistema

$$\begin{cases} x' &= F(x,y), \quad x(0) = x_0 \\ y' &= G(x,y), \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

Se dirá que

- Si F y G no son lineales, que es un *sistema no lineal (SNL).*
- Si además F y G no dependen explícitamente de t, se dirá que es un *sistema no lineal autónomo (SNLA)*

Observación: Si F, G con de clase $\mathcal{C}^1$, por TEU se tiene que existe una única solución al sistema.

Definición 2 (Puntos críticos)**.** Se dice que $(\overline{x}, \overline{y})$ es un punto crítico de o *punto de equilibrio* de un $SNLA$ si

$$\begin{cases} F(\overline{x}, \overline{y}) &= 0 \\ G(\overline{x}, \overline{y}) &= 0 \end{cases}$$

Definición 3 (Nulclinas)**.** Dada una función $F(x,y)$, definimos la *nulclina* en x a la curva definida por $F(x,y)$. Análogo se define la *nulclina* respecto y.

El conjunto de puntos críticos es la intersección de las nulclinas, es decir,

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon F(x,y) = G(x,y) = 0\}$$

Definición 4. Dado un $(SNLA)$ como el de la Definición 1, se define el *sistema linealizado* SL) respecto a alguno de sus puntos críticos $(\overline{x}, \overline{y})$ como el sistema

$$(SL) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J(\overline{x}, \overline{y}) \begin{pmatrix} x - \overline{x} \\ y - \overline{y} \end{pmatrix}$$

Proposición 1. *Sea $(\overline{x}, \overline{y})$ un punto crítico de un $(SNLA)$, se tiene que*

- *Si $|J(\overline{x}, \overline{y})| \neq 0$, entonces $(\overline{x}, \overline{y})$ es el único punto crítico de (SL) y es un púnto crítico aislado de $(SNLA)$.*
- *Si $|J(\overline{x}, \overline{y})| = 0$ entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\overline{x}, \overline{y})$.*

λ_1, λ_2	Pto crítico	Estabilidad	Recorrido
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Nodo	Estable asinto.	Tangente a v_1 (entra)
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	Nodo	Inestable	Tangente a v_1 (sale)
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo	Estable asinto.	Tangente a v_2 (entra)
$0 < \lambda_2 < \lambda_1$	Nodo	Inestable	Tangente a v_2 (sale)
λ_1, λ_2 reales distinto signo	Punto silla	Inestable	Entra v_i asociado a λ_i negativo, sale en el otro
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha > 0$	Espiral	Inestable	–
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha < 0$	Espiral	Estable asinto.	–
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha = 0$	Circunferencia	Estable	–

Cuadro 1: Resumen según valor de λ_1, λ_2

P1.- Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay(x^2 + y^2) \end{cases}$$

donde a es un parámetro real cualquiera. Muestre que el sistema linealizado predice incorrectamente que origen es un centro para cualquier valor de a.

Indicación: para estudiar el sistema no lineal introduzca las coordenadas polares, $x = rcos(\theta)$ e $y = rsin(\theta)$