

MA2601-3 Ecuaciones diferenciales ordinarias.**Profesor:** Axel Osses.**Auxiliares:** Fernanda Blanc, Benjamín Jauregui.**Fecha:** 28 de julio de 2020.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar Extra: Preparación exámen

Definición 1. Considere el sistema

$$\begin{cases} x' &= F(x, y), & x(0) = x_0 \\ y' &= G(x, y), & y(0) = y_0 \end{cases}$$

Se dirá que

- Si F y G no son lineales, que es un *sistema no lineal (SNL)*.
- Si además F y G no dependen explícitamente de t , se dirá que es un *sistema no lineal autónomo (SNLA)*

Observación: Si F, G con de clase C^1 , por TEU se tiene que existe una única solución al sistema.

Definición 2 (Puntos críticos). Se dice que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico de o *punto de equilibrio* de un *SNLA* si

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \bar{y}) &= 0 \\ G(\bar{x}, \bar{y}) &= 0 \end{cases}$$

Definición 3 (Nulclinas). Dada una función $F(x, y)$, definimos la *nulclina* en x a la curva definida por $F(x, y)$. Análogo se define la *nulclina* respecto y . El conjunto de puntos críticos es la intersección de las nulclinas, es decir,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = G(x, y) = 0\}$$

Definición 4. Dado un (SNLA) como el de la Definición 1, se define el *sistema linealizado SL*) respecto a alguno de sus puntos críticos $(\bar{x}, \bar{y})$ como el sistema

$$(SL) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J(\bar{x}, \bar{y}) \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}$$

Proposición 1. Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de un (SNLA), se tiene que

- Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es el único punto crítico de (SL) y es un punto crítico aislado de (SNLA).
- Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$ entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$.

Definición 5. Dado un sistema

$$\begin{cases} x' &= F(x, y), & x(0) = x_0 \\ y' &= G(x, y), & y(0) = y_0 \end{cases}$$

y un punto crítico (x_0, y_0) del sistema, una función $V: B_r(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una función de Lyapunov del sistema en torno a (x_0, y_0) si

1. Se anula en (x_0, y_0) y es positiva en $\mathcal{D}_r$.

$$2- \quad \partial V \frac{\partial V}{\partial x F + \frac{\partial V}{\partial y} G} \leq 0$$

Si la desigualdad de (2) es estricta se dice que es de Lyapunov estricta.

Teorema 1. Dado (x_0, y_0) punto crítico aislado de un (SNLA), entonces

- Si existe una función de Lyapunov en torno a (x_0, y_0) , entonces el punto crítico es estable.
- Si existe una función de Lyapunov estricta en torno a (x_0, y_0) , entonces el punto crítico es asintóticamente estable.
- Por el contrario, si existe una función con las mismas características pero con $\frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G > 0$, entonces el punto crítico es inestable.

P1.- a) Considere el siguiente sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= x - y - 2 \\ y'(t) &= y^2 - (x + 1)^2 \end{cases}$$

Encuentre los puntos críticos aislados y determine que tipo de punto crítico es.

b) Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' &= \mu x + y - x f(r) \\ y' &= -x + \mu y - y f(r) \\ r(t) &= (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Con μ un parámetro real, $f(r)$ continua, estrictamente creciente y tal que $f(0) = 0$.

b.1) Muestre que el origen es un punto fijo de $(SNLA)$. Determine que las variables

$$r(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}}, \quad \theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

Satisfacen

$$\begin{cases} r'(t) &= r(t) (\mu - f(r(t))) \\ \theta'(t) &= -1 \end{cases}$$

Concluye que no hay más puntos fijos para el $(SNLA)$.

b.2) En el caso $\mu \leq 0$, demuestre que el origen es de tipo espiral asintóticamente estable y bosqueje un diagrama de fases.

b.3) Considere ahora el caso $\mu > 0$.

1. Demuestre que existe un único recorrido $\mathcal{C}$ tal que $r'(t) = 0$, el cual corresponde a una circunferencia de radio $r_{\mathcal{C}}$.
2. Muestre que

$$\begin{cases} r(\mu - f(r)) &> 0, \quad \forall r \in (0, r_{\mathcal{C}}) \\ r(\mu - f(r)), &\forall r > r_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

3. En clases se vio que dos trayectorias que se insertectan comparten el mismo recorrido. Deduzca que cualquier trayectoria tal que

$$0 < x(0)^2 + y(0)^2 < r_{\mathcal{C}}^2$$

es tal que $r'(t) \geq 0$. Del mismo modo, si

$$x(0)^2 + y(0)^2 > r_{\mathcal{C}}^2$$

Entonces $r'(t) < 0$, para todo $t \geq 0$.

4. Bosqueje un diagrama de fases para el $(SNLA)$.

P2.- Sea $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ positiva en todo su dominio tal que el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto de mínimo estricto de H con $H(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Se define

$$F_1(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \quad F_2(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$$

y considere el sistema

$$\begin{cases} x' &= F_1(x, y) \\ y' &= F_2(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Demuestre que el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico para el sistema (1) y que $H(x, y)$ es una función de Lyapunov para el sistema (1) en $(\bar{x}, \bar{y})$. ¿Es $(\bar{x}, \bar{y})$ estable o asintóticamente estable? Justifique.

P3.- Considere la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz exponencial e^{At} . Resuelva el sistema $x' = Ax + b(t)$ con condición inicial $x(0) = (0, 0, 0)$ y $b(t) = (e^t, 0, 0)$.

P4.- (Propuesto) Determine la solución particular del siguiente sistema

$$\begin{cases} x' &= 7x - 8y + te^{-t} \\ y' &= 4x - 5y \end{cases}$$

Encuentre la matriz fundamental canónica del sistema y una solución particular.

Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico aislado, λ_1, λ_2 los valores propios asociados a $J(\bar{x}, \bar{y})$ y v_1, v_2 sus vectores propios asociados.

Se tiene que

λ_1, λ_2	Pto crítico	Estabilidad	Recorrido
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Nodo	Estable asinto.	Tangente a v_1 (entra)
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	Nodo	Inestable	Tangente a v_1 (sale)
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo	Estable asinto.	Tangente a v_2 (entra)
$0 < \lambda_2 < \lambda_1$	Nodo	Inestable	Tangente a v_2 (sale)
λ_1, λ_2 reales distinto signo	Punto silla	Inestable	Entra v_i asociado a λ_i negativo, sale en el otro
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha > 0$	Espiral	Inestable	—
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha < 0$	Espiral	Estable asinto.	—
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha = 0$	Circunferencia	Estable	—

Cuadro 1: Resumen según valor de λ_1, λ_2