MA2601-4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 2018
Profesor: Daniel Parra
Auxiliar: Valentin Retamal, José M. Palacios
Fecha: 14 de agosto de 2018

Auxiliar 10

Resumen

Definición 1. *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo de tiempo fijo y $t \in I$. Un **sistema autónomo** de 2×2 es un **sistema no lineal** de ecuaciones de la forma:*

$$\begin{cases} x'(t) &= f\big(x(t), y(t)\big), \\ y'(t) &= g\big(x(t), y(t)\big). \end{cases} \tag{1}$$

*Es importante notar que la variable t **no** aparece de manera explícita en*

Teorema 1 (Existencia y unicidad local)**.** *Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $t_0 \in I$ fijos. Bajo las hipótesis de la definición anterior, existe una única solución $\big(x(t), y(t)\big)$ del sistema (1).*

Definición 2 (Nullclinas)**.** *Se llaman **nullclinas** en x e y (respectivamente) a las curvas*

$$\mathcal{N}_x := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = 0\big\}, \qquad \mathcal{N}_y := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ g(x, y) = 0\big\}.$$

Definición 3. *Un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se dice **punto de equilibrio** para el sistema (1) si se satisface que*

$$f(x_0, y_0) \ = \ g(x_0, y_0) \ = \ 0.$$

*En otras palabras, la función $\big(x(t), y(t)\big) = (x_0, y_0)$ es una **solución constante** del sistema (1).*

Definición 4 (No degenerancia)**.** *Consideremos un sistema lineal de 2×2 de la forma $X'(t) = AX(t)$*

1. *Diremos que $(0, 0)$ es **no degenerado** si $\det A \neq 0$. Si esto no se cumple diremos que el sistema será **degenerado**. Por otro lado, que un punto de equilibrio $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*
2. *Diremos que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un **punto de equilibrio no degenerado** del SNLA (1) si $\det J(x_0, y_0) \neq 0$. Si esto no se cumple, diremos que el SNLA es degenerado en torno al punto (x_0, y_0).*

Teorema 2. *Consideremos el sistema lineal $X'(t) = AX(t)$, con $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ una matriz de 2×2 invertible. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sus respectivos valores propios, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (es decir, A es diagonalizable). Entonces,*

1. *Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, diremos que $(0, 0)$ es un nodo estable del sistema.*
2. *Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, diremos que $(0, 0)$ es un nodo inestable del sistema.*
3. *Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, diremos que $(0, 0)$ es un punto silla del sistema.*
4. *Si $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, $b \neq 0$ tenemos los siguientes casos:*
   a) *Si $a < 0$, diremos que $(0, 0)$ es una espiral estable.*
   b) *Si $a > 0$, diremos que $(0, 0)$ es una espiral inestable.*
   c) *Si $a = 0$, diremos que $(0, 0)$ es un centro estable.*