

Resumen:

- La matriz exponencial

$$e^{At} = e^{P D t P^{-1}} = P e^{D t} P^{-1}$$

→ Tenemos que la sol de la EDO es de la forma

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x_0}_{x_h} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) ds}_{x_p}$$

→ Propiedades de la exponencial

1. $e^{0t} = e^{A0} = I$

2. $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$

3. $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$. En particular e^{At} es invertible
y $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

4. $AB = BA \Leftrightarrow B e^{At} = e^{At} B$

5. $AB = BA \Leftrightarrow e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

→ Exponencial de una matriz **diagonalizable**

↳ $A = P D P^{-1}$

1. $\vec{x}_h(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$

$$= P e^{Dt} e^{-D t_0} P^{-1} X_0$$

$$= P e^{Dt} C, \quad C \text{ matriz de ctes.}$$

$$\Rightarrow X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} V_n$$

Sin las propiedades de la matriz
exponencial



Con las propiedades de la matriz
exponencial



P1
$$\begin{aligned} x' &= (t-1)x + 2y \\ y' &= (t+2)y - x \end{aligned}$$

a) Escriba el sist como $\vec{z}' = A(t)\vec{z}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{z}' = A(t)\vec{z}$$

b) $V_P, \vec{V}_P$ y PDP^{-1} .

Calculando los valores propios,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} t-1-\lambda & 2 \\ -1 & t+2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (t-1-\lambda)(t+2-\lambda) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - \lambda t - t - 2 + \lambda - \lambda t - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (2t+1)\lambda + t(t+1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+(2t+1) \pm \sqrt{(2t+1)^2 - 4t(t+1)}}{2}$$

$$\lambda_1 = t$$

$$\lambda_2 = t+1$$

Calculamos los vectores propios para cada vector propio

- $\lambda_1 = t$

$$(A - tI)\vec{a} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t-1-t & 2 \\ -1 & t+2-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos $-a_1 + 2a_2 = 0$

$$\Rightarrow a_1 = 2a_2$$

dejando en función de a_2 ,

$$a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vector propio del valor propio
 $\lambda = t$

- $\lambda_2 = t+1$

$$(A - (t+1)I)\vec{a} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t-1-(t+1) & 2 \\ -1 & t+2-(t+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{i)} -2a_1 + a_2 \cdot 2 = 0 \\ \text{ii)} -a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2$$

dejando en función de a_1

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vector propio del valor propio
 $\lambda_2 = t+1$

Ahora tenemos que diagonalizar A de la forma
 $A = PDP^{-1}$.

de Álgebra Lineal sabemos que

$$P = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ la cual es invertible}$$

$$\text{y } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

Para obtener P^{-1} y mostrar que existe, encontremos la inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Fila 2} - \text{Fila 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Fila 1} - \text{Fila 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

P^{-1}

$$\text{Así, } A = P D P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \overset{\text{C.V.}}{\vec{z}} = P \vec{w} \text{ con } \vec{w} = (u, v).$$

Sabemos que $z' = Az$ con $z = (x, y)$

$$\Rightarrow z' = PDP^{-1}z \quad / \circ P^{-1}$$

$$\Rightarrow (P^{-1}z)' = DP^{-1}z$$

$$\bullet (P^{-1}z)' = P^{-1}z' + 0 \quad \text{y } (P^{-1}z = w)$$

$$\Rightarrow (P^{-1}z)' = D(P^{-1}z)$$

$$\Rightarrow w' = Dw \quad \text{con } w = (u, v)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{i) } u' = ut \\ \text{ii) } v' = (t+1)v \end{array} \right\} \text{2 EDOs de 1º orden independientes}$$

$$\text{a) i) } u' = ut \\ \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int t dt$$

$$\Rightarrow \ln|u| = t^2/2 + C$$

$$\Rightarrow u(t) = c_1 e^{t^2/2}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } v' = (t+1)v$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int (t+1) dt$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \frac{1}{2}t(t+2) + C$$

$$\Rightarrow v(t) = c_2 e^{\frac{1}{2}t(t+2)} \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{de } z = pw$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^{t^2/2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{t(t+2)}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$x(t) = 2c_1 e^{t^2/2} + c_2 e^{\frac{t(t+2)}{2}}$$

$$y(t) = c_1 e^{t^2/2} + c_2 e^{\frac{t(t+2)}{2}}$$

P2
$$\begin{aligned} x' &= x + 3y + t^2 \\ y' &= 3x + y - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

Primero escribimos el problema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}' = A\vec{x} + \vec{B}(t)$$

Ahora encontramos los valores propios de A

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-4)(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = -2$$

Valores propios de A

Como la matriz es diagonal, todo es bonito y sacamos los vectores propios

- $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De acá tenemos que $a_1 = a_2$, dejando en función de a_1

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vector propio para } \lambda_1 = 4$$

- $\lambda_2 = -2$

$$(A + 2I)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De acá tenemos que $a_1 = -a_2$. Dejando en función de a_1

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ vector propio para } \lambda = -2$$

Así, expresando $A = PDP^{-1}$ [descomponiendo]

Tenemos que $P = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y para P^{-1} , calculamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\bar{F}_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Así calculamos $x_n = e^{At} x_0$

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{PDP^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ e^{4t} - e^{-2t} & e^{4t} + e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ e^{4t} - e^{-2t} & e^{4t} + e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$X_p = \int_0^t e^{A(t-s)} B(s) ds$$

$$e^{A(t-s)} B(s) = \frac{1}{2} e^{-2(t-s)} \begin{pmatrix} e^{6(t-s)} + 1 & e^{6(t-s)} - 1 \\ e^{6(t-s)} - 1 & e^{6(t-s)} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 \\ -2e^{-2s} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2(t-s)} \begin{pmatrix} s^2(e^{6(t-s)} + 1) - 2e^{-2s}(e^{6(t-s)} - 1) \\ s^2(e^{6(t-s)} - 1) - 2e^{-2s}(e^{6(t-s)} + 1) \end{pmatrix}$$

Integral into is mucho trabajo.

Hacemos un C.V

$$\vec{x}' = (A + P^{-1})\vec{x} + \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = P^{-1}\vec{x} \rightarrow \vec{x} = P\vec{u}$$

$$u' = P^{-1}x' = P^{-1}(Ax + B)$$

$$= P^{-1}(PDP^{-1}(Pu) + B)$$

$$= Du + V^{-1}B = u'$$

Así,

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1' = 4u_1 + \frac{t^2}{2} - e^{-2t}$$

$$u_2' = -2u_2 + \frac{t^2}{2} + e^{-2t}$$

→ 2 edos lineales indep.

Se resuelven con factor integrante.

$$u_1 = C_1 e^{4t} - \frac{t^2}{8} - \frac{t}{16} + \frac{e^{-2t}}{6} - \frac{1}{64}$$

$$u_2 = C_2 e^{-2t} + \frac{t^2}{4} + e^{-2t} t - \frac{t}{4} + \frac{1}{8}$$

Así tenemos $\vec{u}$.

Para mostrar $\vec{x} = V\vec{u}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} + \frac{7}{64} + \frac{t^2}{3} - \frac{5t}{16} + \left(\frac{1}{6} + t\right)e^{-2t} \\ c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t} - \frac{9}{64} + \frac{3t}{16} - \frac{3t^2}{8} + \left(\frac{1}{6} - t\right)e^{-2t} \end{pmatrix}$$