Resumen

$$(PC)\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

- $A \in M_{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$
- $B \equiv 0 \to$ homogénea
- A es a coef ctes $\to$ Sistema a coefs ctes
- $x(t) = X_h + X_p$

Matriz fundamental canónica Φ

- $\Phi(t_0) = I$
- $\Phi'(t_0) = A\Phi$
- Φ es invertible

Por TEOREMA $\{\Phi_k\}_{k=1}^n$ es base de $\mathcal{H}$

$$\Phi = (\phi_1 \cdots \phi_n)$$

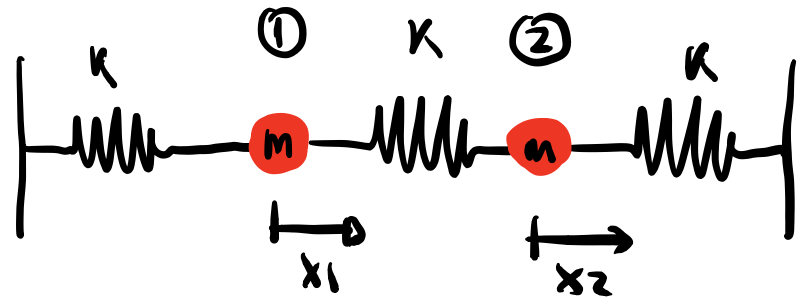
$$X_n = \sum_{i=1}^{n} C_n \phi_n$$

Matriz fundamental

$$M'(t) = A(t)\, M(t)$$

$$\Rightarrow \quad X(t) = \underbrace{M(t)\, M^{-1}(t)}_{\Phi}\, X_0 = \cdots$$

P1

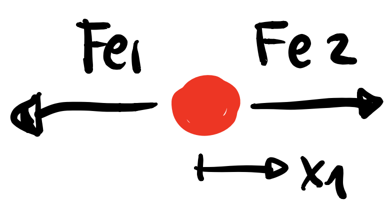


a) Hagamos un DCL para cada masa

La fuerza elástica viene dada por el largo natural del resorte y la deformación que sufre.

Supongamos que los resortes tienen largo natural l. Como están partiendo del equilibrio, cada masa se desplaza x_1 o x_2.

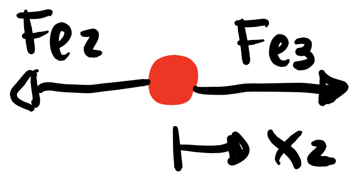
①



$\boxed{\Sigma F_x}$ $\quad -F_{e1} + F_{e2} = m\ddot{x}_1$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 = -K(l_0 + x_1 - l_0) + K(l_0 + x_2 - x_1 - l_0)$$

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 + K(x_2 - x_1) \quad (1)$$

(2) 

$$\boxed{\sum F_x} \quad -F_{e2}+F_{e3} = m\ddot{x}_2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_2 = -k(l_0+x_2-x_1-l_0)+k(l_0-x_2-l_0)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1)-kx_2 \qquad (2)$$

b) Ya tenemos las ecs de mov para (1) y (2), notemos que el mov de cada una dependerá del mov de la otra (según las ecs) lo que concuerda con nuestra intuición de cómo se moverá el sistema.

Pasemos las ecs a su forma matricial

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2-x_1) \qquad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1)-kx_2 \qquad (2)$$

- <u>Forma 1</u>

normalizando y separando para x_1 y x_2

y $k/m = w^2$

$$\ddot{x}_1 = -2w x_1 + w x_2$$

$$\ddot{x}_2 = -2w x_2 + w x_1$$

Para pasar a 1° orden, usamos $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ de modo que $\dot{(\dot{x}_1)} = \ddot{x}_1$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{y}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2w^2 & w^2 & 0 & 0 \\ w^2 & -2w^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

c) Ahora resolvemos, debemos hallar los valores propios de A

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -2w^2 & w^2 & -\lambda & 0 \\ w^2 & -2w^2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (w^2+\lambda^2)(3w^2+\lambda^2) = 0$$

$\lambda_1 = iw$ $\lambda_2 = -iw$ $\lambda_3 = iw\sqrt{3}$

$\lambda_4 = -iw\sqrt{3}$

Valores propios de A

Para encontrar los vectores propios, reemplazemos los valores propios en $(A-\lambda I)\vec{v}=0$

- $\underline{\lambda_1 = iw}$

$$(A-i\sqrt{w}) = \begin{pmatrix} -iw & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -iw & 0 & 1 \\ -2w^2 & w^2 & -iw & 0 \\ w^2 & -2w^2 & 0 & -iw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-iwa_1 + a_3 = 0 \qquad -2w^2a_1 + w^2a_2 - iwa_3 = 0$$
$$-iwa_2 + a_4 = 0 \qquad w^2a_1 - 2w^2a_2 - iwa_4 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega \\ +i\omega \end{pmatrix} \rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega \\ i\omega \end{pmatrix}$$ Vector propio para λ_1

- $\underline{\lambda_2 = -i\omega}$

$$(A + i\omega) = \begin{pmatrix} i\omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 & 1 \\ -2\omega^2 & \omega^2 & i\omega & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\omega \\ -i\omega \end{pmatrix} \rightarrow \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\omega \\ -i\omega \end{pmatrix}$$ vector propio para λ_2

- $\underline{\lambda_3 = i\sqrt{3}\omega}$

$$(A - i\sqrt{3}\omega) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3}\omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3}\omega & 0 & 1 \\ -2\omega^2 & \omega^2 & -i\sqrt{3}\omega & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2 & 0 & -i\sqrt{3}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3}\omega \\ -i\sqrt{3}\omega \end{pmatrix} \rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3}\omega \\ -i\sqrt{3}\omega \end{pmatrix}$$

- $\lambda_4 = -i\sqrt{3}w$

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{3}w \\ i\sqrt{3}w \end{pmatrix} \to \boxed{V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3}w \\ -i\sqrt{3}w \end{pmatrix}}$$

Finalmente, tenemos los valores y vectores propios. Así la sol general será

$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{V}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{V}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \vec{V}_3 + c_4 e^{\lambda_4} \vec{V}_4$$

$$= c_1 e^{iwt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ iw \\ iw \end{pmatrix} + c_2 e^{-iwt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -iw \\ -iw \end{pmatrix}$$

$$+C_3 e^{i\sqrt{3}\omega t}\begin{pmatrix}1\\-1\\i\sqrt{3}\omega\\-i\sqrt{3}\omega\end{pmatrix} + C_4 e^{-i\sqrt{3}\omega t}\begin{pmatrix}1\\-1\\-i\sqrt{3}\omega\\i\sqrt{3}\omega\end{pmatrix}$$

pero sólo nos interesa x_1, x_2

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = C_1 e^{i\omega t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$+ C_3 e^{i\sqrt{3}\omega t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_4 e^{-i\sqrt{3}\omega t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos(\omega t - \phi_1)$$

$$+ B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos(\sqrt{3}\omega t - \phi_2)$$

$A, B, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$

que corresponde al mov de oscilación acoplada de las masas entre los resortes.

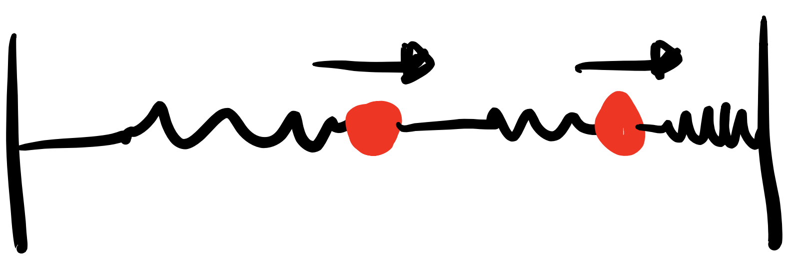
Interpretación.

<u>Caso 1</u>: Consideremos $\lambda_{1,2}^2 = \omega^2$

entonces el vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Físicamente, entonces, ambas masas se moverán con igual frecuencia ω en la misma dirección.

A esto se le llama "mov. en fase"



<u>Caso 2</u>: Consideremos $\lambda_{3,4}^2 = 3\omega^2$

entonces el vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Físicamente, ambas masas se moverán con igual frecuencia $\sqrt{3}\omega$ pero en direcciones opuestas.

A esto se le llama "mov. en contrafase" o "anti fase"