Transformada de Laplace

[DEFINICION] (Transformada de Laplace)

dada $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que asocia a $s \in \mathbb{R}$ el valor $\mathcal{L}[F](s)$

$$\mathcal{L}[F](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

cuando la integral converge. Si la transformada de Laplace de una función existe para $s > c$, la mínima cota "c" se llama asíntota de la transformada.

Ej: $f(t) = 1$, $s \leq 0$ no converge.

$s > 0$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad \text{asíntota } c = 0.$$

Ej: $f(t) = e^{at}$ $a \in \mathbb{C}$. si $s \leq Re(a)$ $\int_0^\infty e^{-st} e^{at}$ no converge.

si $s > Re(a)$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a} \qquad c = Re(a)$$

PROPIEDADES:

- $\mathcal{L}[Re(f)] = Re\,\mathcal{L}[f]$ $\qquad \mathcal{L}[Im(F)] = Im\,\mathcal{L}[f]$

  $\to \mathcal{L}[\cos\omega t](s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ $\qquad \mathcal{L}[\operatorname{sen}\omega t](s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad s > 0$.

- $\mathcal{L}[f + \lambda g](s) = \mathcal{L}[F](s) + \lambda\,\mathcal{L}[g](s)$.

* Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a \in Dom(f)$ si los límites laterales $\lim$ existen, son finitos y distintos

* Una función $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un nº finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0,\infty)$ pero sobre cada sub-intervalo acotado de $[0,\infty)$ tiene a lo más un nº finito de estas

Ej: $f(t) = (-1)^{[t]} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$ $\to$ continua por pedazos

* Una función $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen $a \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad \forall t \geq 0.$$

Al menor de tales a se le llama orden exponencial de f. $\to$ La función está encerrada entre Me^{at} y $-Me^{at}$.

* El espacio C_a es el conjunto de las funciones $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que son continuas por pedazos y de orden exponencial a.

$\to$ si $f' \in C_a$, $\quad |f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(s)|ds$

$$\leq |f(0)| + \frac{M}{a} e^{ax}$$

$$\leq \tilde{M} e^{ax} \qquad \therefore f \in C_a$$

- Si $f \in C_a$ entonces $\forall s>0$, existe $\mathcal{L}[f](s)$ (y converge absolutamente). Además

$$|\mathcal{L}[f](s)| \le \frac{M}{s-a} \qquad \forall\, s>a$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) = 0$$

Propiedades básicas de la transformada de Laplace

[Transformada de una derivada]

Sea $f \in C_a$ derivable. $s>a$.

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty$$

$$= s\,\mathcal{L}[f](s) + \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - \lim_{t\to 0} e^{-st}f(t)$$

Como f es de orden exponencial a,

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st}f(t)| \le \lim_{t\to\infty} |e^{-st}e^{at}| = \lim e^{-(s-a)t} = 0 \quad s>a.$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](s) = s\,\mathcal{L}[f](s) - \lim_{t\to 0^+} f(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\,\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)} \lim_{t\to 0^+} f(t)} \quad s>a$$

[Transformada de una primitiva]

Sea $f \in C_a$ localmente integrable. Sea $a \in \mathbb{R}$. Encontremos la transformada de la función $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Para $s>a$

$$\mathcal{L}[F'](s) = s\,\mathcal{L}[F](s) - \lim_{t\to 0^+} F(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)\,du}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_a^t \cdots \int_a^t}_{n} f(u)\,du\right](s) = \frac{1}{s^n}\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^k}\int_0^a \cdots \int_0^a f(u)\,du}$$

[Traslaciones]

Una traslación en el dominio temporal t corresponde a un factor exponencial en el dominio de Laplace s. Si $f \in C_a$ y $a \in \mathbb{R}$, la función f trasladada hacia la derecha se define en todo $[0,\infty)$ como $H(t-a)f(t-a)$. Se tiene entonces que

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} H(t-a) f(t-a)\, dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)} f(u)\, du$$

$$= e^{-sa} \mathcal{L}[f(t)](s)$$

De manera análoga una traslación en el dominio de Laplace corresponde a un factor exponencial en el dominio temporal.

$$\mathcal{L}[f(t)](s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\, dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} e^{a} f(t)\, dt$$

$$= \mathcal{L}[e^{at} f(t)](s)$$

[Igualdad de Transformadas]

Nos interesa saber cuándo $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g] \Rightarrow f = g$. La respuesta está dada por el siguiente teorema.

[TEOREMA] (Lerch): Si $f, g \in C_a$ y $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$ $\forall s > a$

$\Rightarrow f(t) = g(t)$ $\forall t \geq 0$ salvo en la unión de discontinuidades de f y g

[Convolución]

Sean f y g funciones en C_a. El producto de convolución entre f y g se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^{t} f(s) g(t-s)\, ds$$

[PROPIEDAD] El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distribuye con respecto a la suma en C_a

[TEOREMA] Sean $f, g \in C_a$. Entonces

$$\mathcal{L}[(f*g)](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$

La transformada de la convolución es el producto de las transformadas

[Transformada de funciones periódicas]

Sea f función T-periódica, notemos que si f es acotada, luego $f \in C_a$, entonces si f es continua o acotada $\Rightarrow f \in C_a$.

[Propiedad] Sea f función T-periódica, luego su transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

[Convergencia uniforme]

Sean $f \in C_a$ y $M > a_0 > a$. Definimos

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \quad y \quad \Phi_n(s) = \int_0^n e^{-st} f(t)\,dt.$$

Con $s \in I = [a_0, M]$

$$|\Phi_n(s) - \Phi(s)| = \left| \int_n^\infty e^{-st} f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \frac{c}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_n^\infty$$

$$\leq \frac{c}{s-a} e^{-(s-a)n} \qquad \forall s \in I.$$

si $\|g\|_I = \sup_{s \in I} |g(s)|$, entonces:

$$\|\Phi_n - \Phi\|_I \leq \sup_{s>a} \frac{c}{s-a} e^{-(s-a)n}$$

$$= \frac{c}{a_0 - a} e^{-(a_0-a)n}$$

Por lo tanto $\|\Phi - \Phi_n\|_I \to 0$ cuando $n \to \infty$

$\Rightarrow \Phi_n$ converge uniformemente a Φ en I.

[Diferenciabilidad]

Sea $f \in C_a$. Calcularemos la derivada c/r a s de la transformada de Laplace F.

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st}\,dt \quad \to \text{convergencia uniforme}$$

$$= \int_0^\infty -t e^{-st}\,dt$$

$$= -\mathcal{L}[t f(t)](s)$$

$$\boxed{\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)}$$

[Integrabilidad]

Gracias de nuevo a la convergencia uniforme

$$\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u)\,du = \int_0^s \left(\int_0^\infty e^{-ut} f(t)\,dt \right) du$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-ut} f(t)\,du \right) dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{-1}{t} e^{-ut} \Big|_0^s f(t) \right) dt$$

$$= -\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$$

$$= -\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt \qquad f \in Ca$$

- Si $g(t) = \frac{f(t)}{t}$

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = -\mathcal{L}[f(t)](s)$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) - \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = -\int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)\,du$$

- Si $\frac{f(t)}{t} \in Ca$, $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = 0.$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)\,du$$

- Se puede verificar que $\frac{f(t)}{t} \in Ca$ cuando $f(t) \in Ca$ y $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe y es finito. Bajo esta condición obtenemos.

$$\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u)\,du = -\int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)\,du + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)\,du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$$

Sistemas lineales de 1° orden

[TEOREMA] (Existencia y Unicidad) (caso lineal)

Sea I un intervalo cerrado y acotado. Si $A \in C(I)^{m\times m}$ y $B \in C(I)^{m}$, entonces dadas $X_0 \in \mathbb{R}^m$ y $t_0 \in I$, existe una única solución $X \in C^1(I)$ del sistema lineal.

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t), & t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

* La única sol de un sistema homogéneo con condición inicial nula es la función nula

* Si dos soluciones X e Y coinciden en un punto, entonces coinciden en todo el intervalo. Esto dice que los gráficos de 2 sol distintas no se cruzan.
  Si $X(t_1) = Y(t_1) \Rightarrow X - Y$ es sol de un sist homogéneo con cond inicial nula $\Rightarrow X(t) = Y(t)$ $\forall t$.

* Si A o B son continuas x pedazos $\Rightarrow$ X' es continua por pedazos (seccionalmente completo)

Lema: $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ $X \in \mathbb{R}^p$

$$\Rightarrow \|AX\| \leq \|A\|\,\|X\|$$

[TEOREMA] (Cauchy-Lipschitz-Picard Existencia y Unicidad) (caso general)

Sea I un intervalo cerrado y acotado. Supongamos que $F \in C^0(I\times\mathbb{R}^m)$ es una función Lipschitz c/r a la segunda variable. Para cada $t_0 \in I$ y cada $X_0 \in \mathbb{R}^m$, existe una única sol $X \in C^1(I)^m$ del P-C

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & \forall t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

[TEOREMA] (Valor medio)

$G: D \to \mathbb{R}^n$ función diferenciable en un abierto D. C una bola cerrada contenida en D. Si la matriz Jacobiana J_G es continua en C,

$\Rightarrow$ G Lipschitz en C

$(\Leftrightarrow)$ $\exists\, k_G > 0$ tq $\|G(y) - G(z)\| \leq L_C\|y - z\|$ $y, z \in C$

$\to$ Estructura geométrica de las soluciones

$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^n : X' = A(t)X \quad t \in I\}$ $\to$ espacio de soluciones del sist HOMOGÉNEO

$S = \{X \in \mathbb{R}^n : X' = A(t)X + B(t),\ t \in I\}$ $\to$ Hiperplano de soluciones del sist NO HOMOGÉNEO

~~Dada~~ [TEOREMA]

Dada una sol. particular X_p de $X' = AX+B$, toda sol del sistema se escribe como suma de X_p y alguna sol del sist homogéneo

$$S = X_p + \mathcal{H}$$

En lo que sigue fijamos $t_0 \in I$. Del TEU sabemos que PARA CUALQUIER CONDICIÓN INICIAL, EL SIST HOMOGÉNEO TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN.

* Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental canónica del sistema

1. Φ es la única fun en $C^1(I)^{n\times n}$ que satisface $\Phi(t_0) = I_n$ y $\Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \forall t \in I$.
2. $\Phi(t)$ es invertible para todo $t \in I$

[TEOREMA] El conjunto $\{\Phi_k\}_{k=1}^{n}$ es una base de $\mathcal{H}$ llamada base fundamental canónica

- $\dim(\mathcal{H}) = n$
- $\begin{cases} x_h'(t) = A(t)x_h(t) \\ x_h(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x_h = \Phi(t)x_0 = x_0^1\phi_1(t) + \cdots x_0^n\phi_n(t)$

[COROLARIO] Sea $M(t)$ una Matriz fundamental del sistema (no necesaria% canónica)

$$M(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

donde φ_k es sol de $\begin{cases} \varphi_k'(t) = A(t)\varphi_k(t) \\ \varphi_k(t_0) = v_k \end{cases}$

Entonces $\det(M(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$ y

$$\boxed{x(t) = M(t)M^{-1}(t_0)x_0}$$

[VARIACIÓN DE PARÁMETROS]

$$X_p = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = \phi(t)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)\,ds}$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)\,ds$$

→ Exponencial

[PROPOSICION] (Propiedades de la exponencial):

Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $t, s \in \mathbb{R}$,

1. $e^{0t} = e^{A\cdot 0} = I$.
2. $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$
3. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$ En particular e^{At} es invertible y $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.
4. $AB = BA$ ssi $Be^{At} = e^{At}B$.
5. $AB = BA$ ssi $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

Propiedades de la exponencial de una matriz DIAGONALIZABLE

1. $x_h = e^{A(t-t_0)}x_0 = Pe^{Dt}\underbrace{e^{-Dt_0}P^{-1}x_0} = Pe^{Dt}C$

$\Rightarrow x_h = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots \; C \dots C_n e^{\lambda_n t} v_n$

→ Exponencial de una matriz NO DIAGONALIZABLE

[PROPOSICION]

1. v_s es un vector propio generalizado de A de orden s $(s\geq 2)$ asociado a λ ssi $v_{s-1} = (A-\lambda I)v_s$ es un vp generalizado de A de orden $s-1$ asociado a λ

2. Si v_1 es vp. usual,

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= \lambda v_2 + v_1 \\ &\vdots \\ Av_s &= \lambda v_s + v_{s-1} \end{aligned}$$

3. El nº k_s de cadenas de Jordan de largo s es $k_s = 2l_s - l_{s-1} - l_{s+1}$ $\quad l_0 = 0$, $l_s = \dim E_s = \dim \ker(A-\lambda I)^s$ $s\geq 0$.

→ Jordan

[TEOREMA] (Descomposición de Jordan) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

$$A = PJP^{-1}$$ J es única salvo permutaciones de los bloques.

Pasos:

1. Valores propios de A
2. valor propio λ de multiplicidad algebraica m y se determine la dimensión de los espacios $\ker(A-\lambda I)^s$, aumentando s hasta m.
3. Se calculan los k_s, de donde se obtiene un bloque de Jordan de tamaño k_s, asociado a cada cadena, y los respectivos ~~vectores~~ vectores propios generalizados determinan la matriz P.

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1 \quad a = 1$

$\lambda_2 = 1 \quad a = 4$

1) Como λ_1 tiene multiplicidad 1, sólo le corresponderá un bloque de Jordan de tamaño 1. tomamos como vector propio asociado $(0,1,1,0,0)^t$

2) Para λ_2,

$$l_1 = \dim(\ker(A-I)) = 2$$
$$l_2 = \dim(\ker(A-I)^2) = 4$$
$$l_s = \dim\ker(A-I)^s = 4 \quad \forall s \geq 2$$

2.1) Como $l_0 = 0$, $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

→ hay 2 cadenas de largo 2

→ cada cadena determina un bloque de 2x2

2.2) Buscamos los vectores propios generalizados para λ_2

$$(A-I)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = (a,a,0,\beta,\beta)$$
$$(A-I)v_2 = v_1 \Rightarrow v_2 = (\beta+\gamma, \gamma, a, a+\delta, \delta)$$

• Si $a=0$, $\beta=1$, $v_1 = (0,0,0,1,1) \Rightarrow v_2 = (1+\gamma, \gamma, 0, \delta, \delta)$

Si $\gamma=\delta=0 \Rightarrow v_1 = (0,0,0,1,1) \Rightarrow v_2 = (1,0,0,0,0)$

• Si $a=1$, $\beta=0 \Rightarrow v_1 = (1,1,0,0,0) \Rightarrow v_2 = (\gamma, \gamma, 1, 1+\delta, \delta)$

Si $\gamma=\delta=0 \Rightarrow v_2 = (0,0,1,1,0)$

Así $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$