$\boxed{P1}$ a) $y'' + 3y' + 2y = 0$

Expresamos el polinomio característico, ya que la EDO ya se encuentra normalizada.

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

Tenemos que encontrar los λ para los que $p(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2$

*Ver resumen

Como son reales y distintos, tenemos que la base es

$\mathcal{H} = \{e^{-1x}, e^{-2x}\} \rightarrow \dim \mathcal{H} = \text{grad } p(\lambda) = 2$

y la solución es

$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$ $\quad A, B \in \mathbb{R}$

b) $D^3(D+3)^2(D-1)^4(D^2+2D+3)^2 y = 0$

Tenemos una EDO expresada como $P(D)y=0$, que es una forma equivalente de escribir el polinomio característico y resolver mediante la notación de diferenciales nos dará lo mismo que por la notación del polinomio característico.

Expresamos entonces la EDO a través de su polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^3(\lambda+3)^2(\lambda-1)^4(\lambda^2+2\lambda+3)^2.$$

Además, para resolver este ejercicio, nos fijaremos en la multiplicidad algebráica m_λ de las raíces del polinomio característico.

Resolviendo:

$$\lambda^3(\lambda+3)^2(\lambda-1)^4(\lambda^2+2\lambda+3)^2 = 0$$

- $\lambda=0$ es solución con $m_0=3$ $(\lambda^3=0)$

por esto, tenemos 3 sol de reales iguales tq $\lambda=0$

$\Rightarrow \{1, x, x^2\}$

- $\lambda=-3$ es solución con $m_{-3}=2$ $((\lambda+3)^2=0)$

tenemos 2 sol reales iguales tq. $\lambda=-3$
$\Rightarrow \{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$

- $\lambda=1$ es solución con $m_1=4$ $\quad [(\lambda-1)^4=0]$
  tenemos 4 sol reales iguales tq $\quad \lambda=+1$
  $\Rightarrow \{e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x\}$

Para $(\lambda^2+2\lambda+3)^2=0$

$$\lambda^2+2\lambda+3=0 \qquad \lambda=-1\pm\sqrt{2}i$$

Lo que corresponde a 2 complejos conjugados con $m=2$

$\Rightarrow \{e^{-x}\cos(\sqrt{2}x), e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x), xe^{-x}\cos(\sqrt{2}x), xe^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}$

Así la base de soluciones es:

$$\mathcal{H}=\{1, x, x^2, e^{-3x}, xe^{-3x}, e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x, e^{-x}\cos(\sqrt{2}x), e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x), xe^{-x}\cos(\sqrt{2}x), xe^{-x}\sin(\sqrt{2}x)\}$$

$\rightarrow \dim\mathcal{H} = \operatorname{grad} p(\lambda) = 13$

$$y(x)= A+Bx+Cx^2+De^{-3x}+Exe^{-3x}+Fe^x+Gxe^x+Hx^2e^x + Ix^3e^x + Je^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + Ke^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + Lxe^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + Mxe^{-x}\sin(\sqrt{2}x), \quad A, B, \dots, M \in \mathbb{R}$$

c) $ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

Normalizando, $(a \neq 0)$

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$$

Así, el polinomio característico queda:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a}$$

Encontrando las raíces como si fuese cualquier ec. cuadrática,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{c}{a}}}{2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}}}{2}$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}}$$

De donde tenemos 3 casos distintos:

- $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} > 0$ Entonces se tienen 2 soluciones reales distintas

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\} \rightarrow y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$ Entonces $\sqrt{\ } = 0$ y se tienen 2 soluciones reales iguales

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \{e^{-\frac{b}{2a}x}, xe^{-\frac{b}{2a}x}\}$$

$$y(x) = Ae^{-\frac{b}{2a}x} + Bxe^{-\frac{b}{2a}x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} < 0$ Entonces se tienen 2 complejos conjugados

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} + \sqrt{\underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}_{\beta}}$$

$$\{e^{-\alpha x}\cos(\beta x), e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\}$$

$$y(x) = Ae^{-\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{-\alpha x}\sin(\beta x) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Propuesto:

Que f sea periódico significa que $f(x+T) = f(x)$

Si $-\frac{b}{2a} = 0$ y $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} < 0$, nos queda una sol. sinusoidal, y como sen y cos son periódicos, $y(x)$ es periódico.

P2

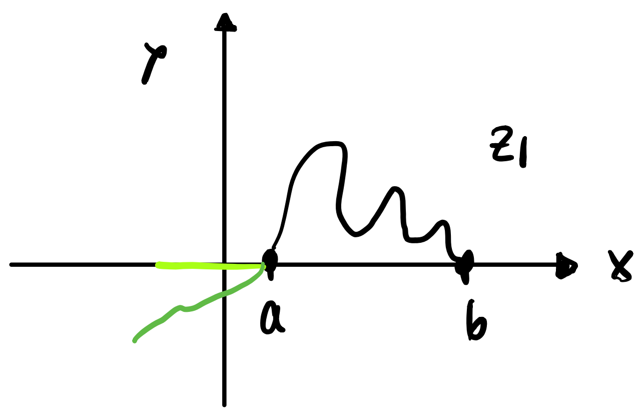
$$y''(x)+p_1(x)\,y(x)=0 \quad (1)$$

$$y''(x)+p_2(x)\,y(x)=0 \quad (2)$$

$$0 < p_1(x) < p_2(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

"Entre dos ceros sucesivos de una solución de (1), cualquier solución de (2) debe anularse"

a)



Como $z_1>0$ en (a,b)

- Si $z_1(a)=0$ significa que la función atraviesa el eje de x para luego ser positiva. Como z_1' representa la pendiente de la curva de z_1, entonces es posible intuir que $z_1'(a)\geq 0$, ya que sólo hay 2 opciones:
  - i) z_1 era negativa antes de $x=a$, entonces es creciente en ese punto y la pendiente es positiva
  - ii) z_1 era cte=0 antes de $x=a$, entonces $z_1'=0$

Así, se deduce que $z_1'(a)\geq 0$ y con un razonamiento análogo, $z_1'(b) \le 0$.

b) $W(z_1, z_2)(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}$ $z_2 > 0$ en (a,b) $\forall x$

$$W(x) = z_1(x) z_2'(x) - z_1'(x) z_2(x)$$

- $W(a) = \cancelto{0}{z_1(a)} z_2'(a) - z_1'(a) z_2(a)$

$\Rightarrow W(a) = \underbrace{-}_{-}\underbrace{z_1'(a)}_{\ge 0}\underbrace{z_2(a)}_{>0}$ De a) $z_1'(a) \ge 0$ y $z_2 > 0$ en (a,b)

$\Rightarrow W(a) \le 0$ ■

- $W(b) = \cancelto{0}{z_1(b)} z_2'(b) - z_1'(b) z_2(b)$

$\Rightarrow W(b) = -\underbrace{z_1'(b)}_{\substack{\le 0 \\ \text{por a)}}}\underbrace{z_2(b)}_{\substack{>0 \\ \text{por b)}}}$

$\Rightarrow W(b) \ge 0$ ■

c) Para ver si una función es creciente o decreciente, podemos estudiar su derivada, pero, W es derivable?

Sip! Por definición el Wronskiano es C^1 en donde las funciones que lo definen sean C^1.

Luego, usando la multilinealidad del determinante

$$W'(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \\ z_1''(x) & z_2''(x) \end{vmatrix}$$

z_1'' y z_2'' existen pues son sol. de una EDO 2° orden.
Luego W' está bien def

$$\Rightarrow W'(x) = \left(z_1(x)z_2'(x) - z_1'(x)z_2(x)\right)'$$

$$= \cancelto{0}{z_1'(x)z_2'(x)} + z_1(x)z_2''(x) - \cancelto{0}{z_1'(x)z_2'(x)} - z_1''(x)z_2(x)$$

$$= z_1(x)z_2''(x) - z_1''(x)z_2(x)$$

¿Qué sabemos de z_1'' y z_2''? Son sol de (1) y (2) respectivamente!

entonces $\quad z_1'' + p_1 z_1 = 0$
$\qquad\qquad\quad z_2'' + p_2 z_2 = 0$

Reemplazando para $W'(x)$

$$\Rightarrow W'(x) = z_1(x)(-p_2(x)z_2(x)) - z_2(x)(-p_1(x)z_1(x))$$

$$\Rightarrow W'(x) = \underbrace{z_1(x)z_2(x)}_{>0}\,[\underbrace{p_1(x) - p_2(x)}_{<0}]$$

Y sabemos que $\forall x \in (a,b)$

$z_1 > 0$ y $p_1 < p_2$

$z_2 > 0$

$\Rightarrow p_1 - p_2 < 0$

$\Rightarrow W'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ ∎

→ W es decreciente en (a,b) ∎

d) Si W es decreciente en (a,b) (de c))

y $W(a) \leq 0$ (de b)

entonces $W(b)$ debiese ser negativa.

Peeero, por b), $W(b) \geq 0$. →←

entonces el error fue asumir que z_2 era positiva en (a,b)

$\Rightarrow$ z_2 no puede ser positiva en (a,b) ∎

e) Si z_2 fuese negativa,

$W(a) \geq 0$

$W(b) \leq 0$

W creciente

por lo que llegamos a la misma contradicción! Como z_2 no es ni negativa ni positiva en (a,b), esta debe anularse en algún punto de (a,b)

f) Si z_1 fuera negativa

$$\left.\begin{array}{l} z_1'(a) \leq 0 \\ \\ z_1'(a) \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} W(a) \geq 0 \\ W(b) \leq 0 \\ W \text{ creciente} \end{array}$$

Se llega a la misma contradicción que en d) y se concluye que

z_2 debe anularse en algún punto de (a,b)

g) Si $z_1(a) = z_1(b) = 0$

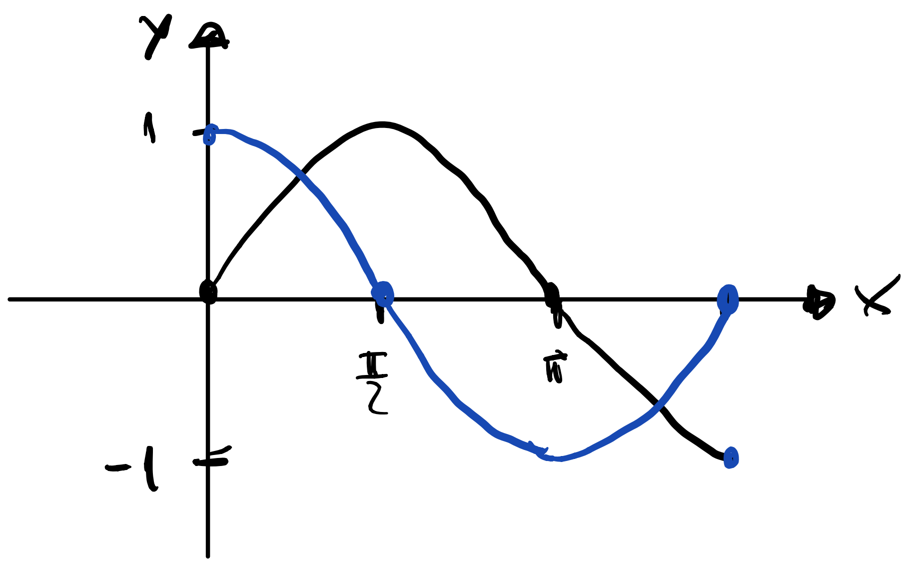
- Si z_1 es positiva, z_2 debe anularse en algún punto de (a,b)

- Si z_1 es negativa, z_2 debe anularse en algún punto de (a,b).

Así, cualquiera sea z_1, tq $z_1(a) = z_1(b) = 0$, z_2 debe anularse entre los 2 ceros consecutivos de z_1.

Se concluye que entre dos ceros sucesivos de una solución de (1), cualquier sol de (2) debe anularse ∎

Ejemplo: $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$



P3 $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln(x) \quad x > 0$

a) Sean $y_1 = x^2 \qquad y_2 = x^2 \ln(x)$

Soluciones de la Ec. homogénea $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

Verifiquemos que son soluciones (solucionando la EDO)

- $y_1 = x^2 \to y_1' = 2x \to y_1'' = 2$

$$\Rightarrow x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 2x + 4x^2$$
$$= 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0 \checkmark \quad \text{solución}$$

- $y_2 = x^2 \ln x \to y_2' = x + 2x \ln x \to y_2'' = 2\ln x + 3$

$$\Rightarrow x^2(2\ln x + 3) - 3x(x + 2x\ln x) + 4x^2 \ln x$$
$$= 2x^2 \ln x + 3x^2 - 3x^2 - 6x^2 \ln x + 4x^2 \ln x = 0 \checkmark \quad \text{solución}$$

Ahora estudiemos el Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\Rightarrow W(x) = x^2(x+2x\ln x) - 2x(x^2\ln x)$$
$$= x^3 + 2x^3\ln x - 2x^3\ln x$$
$$= x^3 \qquad \forall x>0$$

$$\Rightarrow W(x) = x^3 \neq 0 \quad \forall x>0$$

y esto es equivalente a que y_1 e y_2 sean l.i.

b) Usando la fórmula de variación de parámetros del resumen,

$$y_p = -y_1\int \frac{Q(x)y_2}{W}dx + y_2\int \frac{Q(x)y_1}{W}dx$$

¡NOP!

* con $Q(x) = x^2\ln x$ ✗ $Q(x) = \ln(x)$ había que normalizar

$W = x^3$

$y_1 = x^2$

$y_2 = x^2\ln x$

$$\Rightarrow y_p = -x^2\int \frac{\ln(x)\cdot x^2\ln(x)}{x^3}dx + x^2\ln x\int \frac{\ln x\cdot x^2}{x^3}dx$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{3}x^2\ln^3(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^3(x)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{6}x^2\ln^3(x)$$

$$y = y_H + y_p$$

$$y = Ax^2 + Bx^2\ln x + \frac{1}{6}x^2\ln^3(x)$$