MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Benjamin A. Jauregui
Fernanda Blanc

Auxiliar 7: Wronskiano y más

4 de Mayo de 2020

Wronskiano: El Wronskiano asociado a n funciones $y_1, ...y_n \in C^n(I)$ es:

$$W = W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ y_1'' & ... & y_n'' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Si $y1, ..., yn$ son funciones en H, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $W(x_0) \neq 0$ para algún x0 I;
- $W(x) \neq= 0$ para todo x I; y
- $y_1, ..., y_n$ son linealmente independientes.

Solución Particular: Variación de parámetros
Sea $y'' + by' + cy = Q(x)$ una EDO no-homogénea. Entonces su solución general viene dada por

$$y(x) = y_h + y_p$$

donde, una vez determinada y_h, se puede encontrar y_p con:

$$y_p = -y_1 \int \frac{Q(x)y_2}{W} dx + y_2 \int \frac{Q(x)y_1}{W} dx$$

Solución homogénea: Sea $ay'' + by' + cy = 0$ una EDO homogénea. Se define entonces su polinomio caracterísitico como:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0$$

entonces,

- Si λ_1 y λ_1 son reales y distintos:

  $$y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

  Con $A, B \in \mathbb{R}$
- Si $\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}$:

  $$y_h(x) = Ae^(\lambda x) + Bxe^(\lambda x)$$

  Con $A, B \in \mathbb{R}$
- Si $\lambda_1 = a + bi$ y $\lambda_2 = a - bi$ complejos conjugados:

  $$y_h(x) = e^{ax}(Ae^{ibx} + Be^{-ibx})$$

  o equivalentemente,

  $$y_h(x) = Ae^{ax} \sin bx + Be^{ax} \cos bx$$

  Con $A, B \in \mathbb{R}$

P1. Encuentre las bases y soluciones homogéneas para las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$
b) $D^3(D + 3)^2(D - 1)^4(D^2 + 2D + 3)^2 y = 0$
c) $ay'' + by' + cy = 0$ con a,b,c $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Evalúe los casos.
Propuesto: ¿Cuándo es periódica?

P2. Considere las ecuaciones diferenciales en todo $\mathbb{R}$:

$$y''(x) + p_1(x)y(x) = 0 \qquad (1)$$

$$y''(x) + p_2(x)y(x) = 0 \qquad (2)$$

donde p_1 y p_2 son funciones continuas en $\mathbb{R}$ que satisfacen $0 < p_1(x) < p_2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

El problema consiste en demostrar la siguiente proposición:

Entre dos ceros sucesivos de una solución de (1) cualquier solución de (2) debe anularse.

Para ello, se siguen los siguientes pasos:

a) Suponga que z_1 es solución de (1), que es positiva en el intervalo (a, b) y que satisface $z_1(a) = 0$ y $z_1(b) = 0$. ¿Qué se puede decir de $z_1'(a)$ y de $z_1'(b)$?

b) Suponga que z_2 es una solución de (2) y que es positiva en el intervalo (a, b). Si se considera que $W(x) = W(z_1, z_2)(x)$ es el Wronskiano de las funciones z_1 y z_2, demuestre que $W(a) \leq 0$ y $W(b) \geq 0$.

c) Demuestre que $W(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).

d) De b) y c) concluya que z_2 no puede ser positiva en (a, b).

e) ¿Podrá ser que z_2 sea negativa en (a, b)? Concluya que z_2 tiene que anularse en (a, b).

f) ¿Y si z_1 fuera negativa en (a,b)? ¿Qué se puede decir?

g) De los pasos anteriores se obtiene una proposición. Explique.

P3. Considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 ln(x), x > 0$$

a) Verifique que $\{x^2, x^2 ln(x)\}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

b) Encuentre la solución particular de la ecuación no homogénea. No calcule integrales, en caso de aparecer, solo déjelas expresadas.