Wronskiano

Sirve para determinar si las soluciones son l.i o l.d

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

- y_1 y y_2 son li ssi $W \neq 0$
- y_1, y_2 son l.d ssi $W = 0$

Reducción de orden

$y'' - 6y' + 5y = 0 \qquad y_1 = e^x$

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx} \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{4} e^{5x}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 \left(\frac{1}{4}\right) e^{5x}$$

Coeficientes constantes

$y'' - 6y' + 8y = 0$ proponemos una sol

$y = e^{rx} \rightarrow y' = re^{rx} \rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} = 0$

$(r^2 - 6r + 8)e^{rx} = 0$

$r^2 - 6r + 8 = 0 \rightarrow$ polinomio característico

$r_1 = 2 \qquad r_2 = 4$

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}}$$

• $ay'' + by' + cy = 0 \rightarrow$ EDO homogénea

$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0$

i) λ_1, λ_2 reales distintos

$y_H(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ $A, B \in \mathbb{R}$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

$y_H(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$

iii) $\lambda_1 = \theta + i\omega$ $\lambda_2 = \theta - i\omega$ complejos conjugados

$y_H(x) = e^{\theta x}(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x})$

$y_H(x) = Ae^{\theta x}sen(\omega x) + Be^{\theta x}\cos(\omega x)$

• EC Cauchy-Euler

$x^2y'' + xy' - 9y = 0.$ $\boxed{y = x^r}$ $x > 0$

$r^2 - 9 = 0 \rightarrow r_1 = 3$ $r_2 = -3$

$y_1 = x^3$ $y_2 = x^{-3}$

$\boxed{y = C_1x^3 + C_2x^{-3}}$

Scanned by CamScanner

EDOs de 2° orden

- $ay'' + by' + cy = 0$ → EDO homogénea

$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0$

i) Si λ_1 y λ_2 son reales y distintas,

$$y_H(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

ii) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

$$y_H(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$$

iii) Si λ_1 y λ_2 son complejos conjugados de la forma $\sigma \pm i\omega$ $\omega \neq 0$,

$$y_H(x) = e^{\sigma x}(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x})$$

$$y_H(x) = Ae^{\sigma x}\operatorname{sen}(\omega x) + Be^{\sigma x}\cos(\omega x)$$

- $y'' + by' + cy = Q(x)$ → EDO no homogénea.

$$y(x) = y_H + y_P$$

$$y_P = -y_1\int \frac{Q(x)y_2}{W} + y_2\int \frac{Q(x)y_1}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

- Si $Q(x)$ es sol del polinomio característico

$y_P = Ax^m Q(x)$ con m multiplicidad geométrica

EDO de orden n

• Sol reales distintas:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots C_n e^{m_n x}$$

• Sol reales iguales:

$$y = C_1 e^{mx} + x C_2 e^{mx} + x^2 C_3 e^{xm} + \dots + C_n x^{n-1} e^{mx}$$

• Sol imaginarias:

$$y = e^{ax}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

$$m_{1,2} = a \pm \beta i$$

Ej: $y''' + \frac{2}{3}y'' - 9y = 0$ (EDO 3° orden homogenea)

$\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 - 9 = 0$ -> Polinomio característico

Variación de parámetros

$$y''' + y'' - y' - y = 2e^{-x}$$

$y_p = u_1 e^{x} + u_2 e^{-x} + u_3 x e^{-x}$

-> (1) $u_1' e^{x} + u_2' e^{-x} + u_3' x e^{-x} = 0$

(2) $u_1'(e^x)' + u_2'(-e^{-x}) + u_3'(e^{-x} - xe^{-x}) = 0$

(3) $u_1'(e^x)'' + u_2'(-e^{-x})' + u_3'(e^{-x} - xe^{-x})' = 0$

=> (1) $u_1' e^{x} + u_2' e^{-x} + u_3' x e^{-x} = 0$

(2) $u_1' e^{x} - u_2' e^{-x} + u_3' e^{-x}(1-x) = 0$

(3) $u_1' e^{x} + u_2' e^{-x} + u_3' e^{-x}(x-2) = 2e^{-x}$ $Q(x)$

(Ec (3) - (1))

$u_3' e^{-x}(x-2) - u_3' x e^{-x} = 2e^{-x}$

=> $u_3' = -1$ $u_1' = \frac{1}{2}e^{-2x}$ u_2'

=> $u_3 = -x$. $u_1 = -\frac{1}{4}e^{-2x}$ $u_2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}x e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$$

Coeficientes indeterminados → EDO lineal no homogénea

$Q(x)$: polinomios, exponencial seno o coseno

no se puede usar si $Q(x)$ es $\ln x$, $\tan x$, $\sqrt{x}$, ...

$$y''' - 2y'' + y' = f(x) = \cancel{\quad}$$

• $f(x) = x^2 = x^2 e^{0x}$

$p(0) = 0 \Rightarrow ma = 1$, raíz.

$$\Rightarrow y_p = x(A_2 x^2 + A_1 x + A_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_p' = 3A_2x^2 + 2A_1x + A_0 \\ y_p'' = 6A_2 x + 2A_1 \\ y_p''' = 6A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_0 = 6 \\ A_1 = 2 \\ A_2 = 1/3 \end{array}$$

$$\therefore y_p = x\left(\frac{x^2}{3} + 2x + 6\right)$$

• $f(x) = e^x \to p(1) = 0 \Rightarrow$ raíz con m.a 2

$$\Rightarrow y_p = A x^{\overset{m.a}{2}} e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} y_p' = 2Axe^x + Ax^2e^x \\ y_p'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x \\ y_p''' = Ae^x x^2 + 6Ae^x + 6Axe^x \end{array}\right\} A = 1/2$$

$$\therefore y_p = \frac{x^2 e^x}{2}$$

PASO 1: Calcular y_H

$y'' - 5y' + 6y = 2x + 3e^{2x}$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$y_H = Ae^{2x} + Be^{3x}$

$x^2y'' + xy' - 9y = xe^{2x}$

$y_H = C_1x^3 + C_2x^{-3}$

PASO 2: Encontrar y_p (2 casos)

CASO 1: y_H no tiene funciones en común con $Q(x)$

$y'' - 5y' + 6y = \overbrace{x^3 + x}^{f(x)} \rightarrow y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}$

Proponemos una sol del grado del polinomio (3)

$y_{p_1} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$

- si $f(x) = 20 \operatorname{sen} 8x$

$y_{p_2} = A \operatorname{sen} 8x + B\cos 8x$

- Si $f(x) = 12e^{5x}$

$y_{p_3} = Ae^{5x}$

- Si $f(x) = x^3 + x + 20 \operatorname{sen} 8x + 12e^{5x}$

Teorema de superposición de soluciones

$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$

Sustituir $y_p, y_p' \dots$ en la EDO y determinar ctes.

CASO 2: y_H tiene funciones en común con $Q(x)$

- $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$y_H = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

$y_p = Ae^{2x}$ por la menor potencia posible de x tq no aparece en la homogénea.

$\rightarrow y_p = Axe^{2x}$

- $y'' - 2y' + y = xe^x \rightarrow y_H = C_1e^x + C_2xe^x$

$y_p = e^x(A + Bx)x^2$

Operadores de derivación

$$\boxed{* \; D+a = e^{-ax} D e^{ax}}$$

$$\frac{dy}{dx} - 3xy = 2x^2$$

$\Rightarrow D(y) = y'$

$\Rightarrow D^2(y) = y'' \cdots$ y así

- $y''' + y'' = (D^3 + D^2)(y)$
- $x^3y'' + 5xy' + (x^2-1)y = 0$

  $\Rightarrow (x^3D^2 + 5xD + x^2 - 1)(y) = 0$
- $(xD)(D)[y] = (xD)[y'] = xy''$
- $(D)(xD)[y] = D[xy'] = y' + xy''$
- $(3D)(2D)[y] = (2D)(3D)[y] = 6y''$
- $(D)(e^{ax})[y] = D[e^{ax}y] = e^{ax}ay + e^{ax}y'$

Método de operadores

$* \; D+a = e^{-ax} D e^{ax}$

$$y'' - y = e^x$$

$$(D^2-1)[y] = e^x$$

$$(D-1)(D+1)[y] = e^x$$

$$(e^xDe^{-x})(e^{-x}De^x)[y] = e^x$$

$\Rightarrow De^{-2x}De^x[y] = 1$

$\Rightarrow e^{-2x}De^x[y] = \int dx$

$\Rightarrow De^x[y] = e^{2x}x$

$\Rightarrow e^x[y] = \int xe^{2x}dx$

$\Rightarrow e^x[y] = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$\Rightarrow y_p = \dfrac{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}}{e^x} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x$

Operadores inversos

- $D^{-1}[y] = \int y \, dx$

$y'' = \cos(2x)$

$D^2[y] = \cos(2x)$ $\rightarrow$ $y_h = C_1 + C_2 x$

$$y_p = \frac{1}{D^2}\cos(2x)$$

$$= D^{-1}\left(\int \cos(2x)\,dx\right)$$

$$= D^{-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos(2x)$$

Método de anuladores

$y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sen}(3x)e^{2x}$

$(D^2 - 4D + 4)[y] = \operatorname{sen}(3x)e^{2x}$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2$

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

$y = f(x)$ tiene anulador de coef ctes ssi es sol de una EDO homogénea de coef ctes

Scanned by CamScanner

Anuladores

$D^2[x] = D[1] = 0$ D^2 es un anulador de x.

* cualquier múltiplo de un anulador, es un anulador

$(D^2+3)D^3$ es anulador de $5x^2+3x-1$

polinomios * $\boxed{D^{n+1}}$ es anulador de los polinomios de grado n → coef ctes

$5x^4-3x^2+12x-3$ tiene anulador D^5

exponencial * $\boxed{(D-1)[e^x]=0}$ $(D-5)[e^{5x}]=0$

$[D-r]$ es anulador de e^{rx} → coef ctes.

f(x)   * $f(x)D - f'(x)$ anula $f(x)$

* $y=f(x)$ tiene anulador de coef ctes ssi es solución de una EDO homogénea de coef ctes.

↳ $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

$\Rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \lambda a_1 + a_0 = 0$ (polinomio caract)

raíces tipo $y = e^{\lambda x}$

$y = x^n e^{\lambda x}$

$y = e^{ax}\cos bx$ $y = e^{ax}\operatorname{sen} bx$

$y = x^n e^{ax}\cos bx$ $y = x^n e^{ax}\operatorname{sen} bx$

y sus composiciones $(+, \cdot)$ comb lineales

Cómo calcular anuladores

- $\operatorname{sen}(x)$ es sol de $y'' + y = 0$

  $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

y, $y'' + y = 0$

$(D^2+1)[y] = 0$

$\Rightarrow (D^2+1)(\operatorname{sen}(x)) = 0$

$(D^2+1)(\cos(x)) = 0$

- $\operatorname{sen} bx, \cos bx$ $\quad y'' + b^2 = 0.$

$\Rightarrow (D^2+b^2)[\operatorname{sen} bx] = 0$

$\Rightarrow (D^2+b^2)[\cos bx] = 0$

- xe^{2x} $\rightarrow (\lambda-2)(\lambda-2) = 0$ $\quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

$\Rightarrow (D-2)^2[y] = 0$

$\Rightarrow (D-2)^2[xe^{2x}] = 0$

- $x^3 e^{2x}$

  $(D-2)^4[x^3 e^{2x}] = 0$

- $(2+3x-4x^3)e^{2x} \rightarrow$ anulador $(D-2)^4$

$((D-a)^2+b^2)^{n+1}$ $\quad (a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)e^{ax}\begin{matrix}\operatorname{sen} bx,\\ \cos bx\end{matrix}$

$(D-a)^2+b^2$ $\quad e^{ax}\operatorname{sen} bx, e^{ax}\cos bx$

$(D^2+b^2)^{n+1}$ $\quad (a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)\begin{matrix}\operatorname{sen} bx,\\ \cos bx\end{matrix}$

D^{n+1} $\quad a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

$D-a$ $\quad e^{ax}$

D^2+b^2 $\quad \operatorname{sen} bx, \cos bx$

$(D-a)^{n+1}$ $\quad (a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)e^{ax}$

* En una composición (+) el anulador es el mcm entre los anuladores

Método de anuladores

$$y'' + y = x^2$$
$$(D^2+1)[y] = x^2$$

1) Sol homogénea

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$y_H = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x.$$

2) Sol no homogénea.

i) Anulamos $Q(x)$

$$D^3 (D^2+1)[y] = D^3[x^2]$$
$$\Rightarrow D^3(D^2+1)[y] = 0 \rightarrow \lambda^3(\lambda^2+1) = 0$$
$$\Rightarrow (D^5 + D^3)[y] = 0$$

$$y = \underbrace{A + Bx + Cx^2}_{y_P} + \underbrace{E \operatorname{sen} x + F \cos x}_{y_H}.$$

$$y = y_H + y_P$$

ii) Encontrar A, B y C

$$\left.\begin{aligned} y_P &= A + Bx + Cx^2 \\ y_P' &= B + 2Cx \\ y_P'' &= 2C \end{aligned}\right\}$$

Evaluamos en la EDO

$C = 1$

$B = 0$

$A = -2$

$$\Rightarrow y_P = -2 + x^2$$

$$\Rightarrow y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x - 2 + x^2 \,//$$

Scanned by CamScanner

- Teorema Existencia y Unicidad:

Supongamos que las funciones $\bar{a}_k(x)$, $k = 1, \dots, n-1$ y $\bar{Q}(x)$ son continuas en el intervalo I, entonces $\forall x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, el (PC) tiene una única solución

* Si la EDO lineal es homogénea y con cond. iniciales nulas, la única sol es la solución nula

Scanned by CamScanner

• Estudio completo de la EDO lineal de orden n

→ Estructura geométrica de la solución: espacios H y S

• $\boxed{\mathcal{H} = \{ y \in C^n(I) : y^{(n)}(x) + \dots + \bar{a}_1(x) y'(x) + \bar{a}_0 y(x) = 0 \ \forall x \in I \}}$

- cjto de todas las soluciones de la ec. homogénea.
- $\mathcal{H}$ es s.e.v de $C^n(I)$ de dimensión n

• $\boxed{S = \{ y \in C^n(I) : y^{(n)}(x) + \dots + \bar{a}_1(x) y' + \bar{a}_0(x) y = \bar{Q} \text{ en } I \}}$

- cjto de todas las soluciones de la ec. lineal de orden n NO homogénea

• Sea X un e.v, A s.e.v de X y $x \in X$. Definimos un hiperplano o espacio afín

$$\boxed{x + A = \{ z \in X : z = x + a, \ a \in A \}}$$

• [Teorema] $y_p \in S$ es sol de la EDO no homogénea,

$$S = y_p + H$$

* S es un hiperplano que se obtiene al desplazar y_p por el subespacio $\mathcal{H}$
* todo elemento de S se escribe

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_p}$$

→ Condiciones de borde:

- Una EDO de 2° orden tiene una única solución si especificamos el valor de la función y su derivada en un punto. Sea,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Queremos saber para qué valores de λ se tiene sol y cuántas.

1. $\lambda = 0$, $y(x) = Ax + B$ y aplicando condiciones
$\Rightarrow y \equiv 0$

2. $\lambda = -w^2 < 0$, $y(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}$.
$\Rightarrow y \equiv 0$

3. $\lambda = w^2 > 0$, $y(x) = A\,\text{sen}(wx) + B\cos(wx)$
$\Rightarrow y(x) = A\,\text{sen}(wx)$