 a)
$$\begin{cases} y' = 2x(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dem $\forall b > 0 \quad \exists!$ sol continua $y: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Primero, reescribamos la EDO como

$$y' = f(x, y)$$

con $f(x, y) = 2x(1+y)$ función a estudiar.

Primero, $f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}$ por algebra y composicion ya que es la multiplicación de 2 polinomios. Como es continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $[0, b]$ $b > 0$.
(todo esto para la variable x)

Ahora, veamos si f es Lipschitz.

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |2x(1+y_1) - 2x(1+y_2)| \\ &= |2x(1+y_1 - 1 - y_2)| \\ &\leq |2x| |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

y como sólo nos interesa estudiar $x \in [0, b]$
 x a lo más puede ser b ,

$$* |2x| \leq 2 \cdot b$$

$$\Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2b |y_1 - y_2|$$

Así f es Lipschitz en $[0, b]$ con $L = 2b$

Ahora, $y(0) = 0$ (la condición inicial) también pertenece a $[0, b]$.

Así, cumpliéndose las Hipótesis del TEU, concluimos que el problema admite una única solución en $[0, b]$ ■

Ahora resolvemos el PC

$$y' = 2x(1+y) \quad / y \neq -1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(1+y)} = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow \ln|1+y| = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1+y = ke^{x^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = 1 - ke^{x^2}, k \in \mathbb{R}$$

Aplicando la condición inicial,

$$y(0) = 1 - ke^0 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - k = 0$$

$$\Rightarrow k = 1$$

Así, la sol. es $y(x) = 1 - e^{x^2}$

$$b) \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ii) Por separación de variables,

$$y' = y^2 / y \neq 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$\Rightarrow -y^{-1} = x + C, C \in \mathbb{R} (\neq -x)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{-x-c}$$

Aplicando la condición inicial,

$$\Rightarrow y(0) = \frac{1}{-c} = 1 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

Así, la solución es

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{1-x}}$$

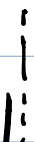
¿Dónde está definida?

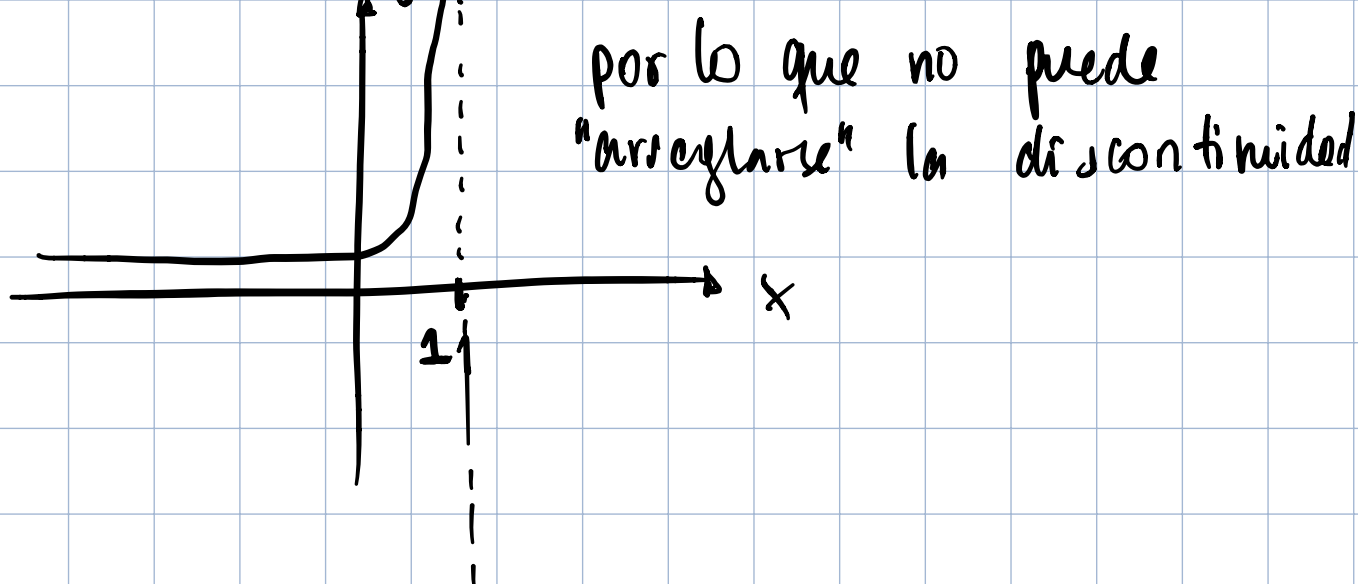
2 opciones: $(-\infty, 1)$ $(1, \infty)$

¿Cómo elijo? $\rightarrow$ La condición inicial debe estar en el intervalo ($x=0$)

$\Rightarrow$ Está definida en $(-\infty, 1)$.

ii) $y(x)$ se grafica como

y 



Sin embargo, $f(x,y) = y^2$ sí es continua en $\mathbb{R}^2$ c/r a x (ya que es una constante) / pero no es Lipschitz.

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |y_1^2 - y_2^2| \\ &= |y_1 - y_2| |y_1 + y_2| \end{aligned}$$

que no es globalmente Lipschitz pues depende de variables

Como no es Lipschitz global, entonces no se cumplen las hipótesis del TEU y no se contradice el Teorema (Los teoremas no se contradicen)

P2

$$PC1 \begin{cases} (1+x^2+2xy^3+y^6)^{1/3} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$a) \quad z = x + y^3 \rightarrow z' = 1 + 3y^2 y'$$

Trabajando la EDO,

$$1 + 3y^2 y' = \sqrt[3]{1+x^2+2xy^3+y^6}$$

$$\Rightarrow 1 + 3y^2 y' = \sqrt[3]{1+(x+y^3)^2}$$

$$\Rightarrow z' = \sqrt[3]{1+z^2}$$

y en las condiciones iniciales

$$z(x_0) = x_0 + y_0^3$$

luego, el 2° problema de Cauchy queda,

$$(PC2) \begin{cases} z' = \sqrt[3]{1+z^2} \\ z(x_0) = x_0 + y_0^3 \end{cases}$$

donde $f(x, z) = \sqrt[3]{1+z^2}$

$$z_0 = x_0 + y_0^3$$

b) Estudiaremos $f(x, z): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, z) = \sqrt[3]{1+z^2}$$

Veamos si es Lipschitz:

Ver Lipschitz por definición es, en este caso, un proceso engorroso. Estudiemos lo siguiente.

Si f posee una derivada c/r a su 2º variable acotada y continua en $\mathbb{R}$, entonces es Lipschitz! por una de las implicancias de ser C^2 .

Veamos, entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) \right| = \left| \frac{2z}{3(1+z^2)^{2/3}} \right|$$

derivada de f
c/r a z

La cual es continua en $\mathbb{R}$ además,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{3(1+z^2)^{2/3}} = 0 \rightarrow \text{es acotado!}$$

Así, f es Lipschitz (con respecto a su 2ª variable)

Luego, por el Teorema de Existencia y Unicidad se concluye que existe una única solución continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ para el PC2, para cualquier x_0 y z_0
También $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

c) Como demostramos TEU en b),

Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera.

Sabemos que

$$z = x + y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{z - x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{z' - 1}{3(z - x)^{2/3}}$$

La cual es continuamente diferenciable (composición) menos cuando

$$z = x$$

$$\Rightarrow x + y^3 = x$$

$$\Rightarrow y = 0$$

y A es justamente $\{x \in \mathbb{R} : y(x) \neq 0\}$

Por otro lado, la condición inicial también está en A .

$$y(x_0) = \sqrt[3]{(z(x_0) - x_0)} = y_0$$

Así, el PCL se resuelve en A .

P3

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+x^2} \\ y(a) = b \end{cases}$$

a) No hay sol.

$$\text{Sea } f(x, y) = \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+x^2}$$

¿Dónde se define?

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y \in [-1, \infty) \quad (\sqrt{1+y^2} \Rightarrow 1+y^2 \geq 0)$$

Luego, las condiciones iniciales deben estar en los mismos intervalos para que exista solución.

Así, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in [-1, \infty)$ para que haya solución,

Para que no exista sol, entonces $b \in (-\infty, -1)$

- b) 1) $f(x,y)$ es continua en A
2) $f(x,y)$ es Lipschitz en A

1. Ya sabemos que $f(x,y)$ es continua en

$$A = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in (-1, \infty)\}. \text{ por b)}$$

2. Evaluemos su derivada parcial

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{1+y}} \quad \text{si } y \neq -1$$

explotan

que también es continua en A

Además

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{1+y}} = 0$$

por lo que es acotada.

Luego, por TEU, existe una única solución del PVI en A para $b > -1$ y $a \in \mathbb{R}$

Resolviendo la EDO,
por variables separables

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y}} = \frac{1}{1+x^2} \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{1+y} = \arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Sol. implícita)

Aplicando la condición inicial

$$y(a) = b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{1+b} = \arctan(a) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 2\sqrt{1+b} - \arctan(a)}$$

Así, la sol del PVI es

$$2\sqrt{1+y} = \arctan(x) + 2\sqrt{1+b} - \arctan(a)$$

La cual es la única sol

c) Si $b = -1$ el Teo no aplica y el PVI tiene más de una sol

$$y(x) = -1 + \left(\frac{\arctan(x)}{2} - \arctan(a) \right)^2$$