MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Benjamin A. Jauregui
Fernanda Blanc

Auxiliar 5: TEU

20 de Abril de 2020

Ecuaciones que se reducen a casos elementales

- **Ecuación Homogénea**: una EDO es del tipo homogénea si se puede escribir como $y' = h(\frac{y}{x})$
Se usa el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$
- **Ecuación de Bernoulli**: es de la forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$ con n distinto de 0 y de 1.
Se usa el cambio de variable $z = y^{1-n}$
- **Ecuación de Riccati**: es de la forma $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$
Se usa el cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{z}$ con y_1 solución conocida de la EDO.
- **EDO de segundo orden sin variable dependiente**: es del tipo $G(x, y', y'') = 0$ (y no está explícito).
Se baja el orden a una ecuación que sepamos trabajar con el cambio de variable $p = y'$

Una función $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es globalmente Lipschitz con respecto a la segunda variable, si si $\exists L > 0$, tal que $\forall y, z \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in I$, se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

El problema de Cauchy asociado a una ecuación de primer orden consiste en encontrar un $y \in \mathcal{C}^1(I)$ tal que

$$(PC)\begin{cases} y'(x) &= f(x, y), \quad \forall x \in I \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Teorema 1 (TEU global)**.** *Sea $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua respecto a la primera variable y globalmente Lipschitz con respecto a la segunda variable. Entonces para todo $x_0 \in I$ e $y \in \mathbb{R}$ existe una única solución global $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ del problema de Cauchy (PC).*

P1. *a*) Considere la ecuación diferencial lineal con condición inicial

$$\begin{cases} y' = 2x(1 + y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Demuestre que para todo $b > 0$, el problema admite una única solución continua $y : [0, b] \to \mathbb{R}$. Encuentre la solución utilizando separación de variables.

b) Considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

i) Resuelva la ecuación utilizando el método de separación de variables.

ii) ¿Es posible extender la solución que obtuvo en a) más allá de $x = 1$? ¿Contradice eso el Teorema de Existencia y Unicidad Global, considerando que la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2$, es continua?

P2. Considere el siguiente problema de Cauchy (Problema de Cauchy 1):

$$\begin{cases} (1 + x^2 + 2xy^3 + y^6)^{1/3} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) Usando el cambio de variable $z = x + y^3$, transforme este problema en un nuevo problema de Cauchy.

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z)$$

$$z(x_0) = z_0$$

especificando f,x_0 y z_0

b) Aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad, encuentre todos los valores de x_0, $z_0 \in \mathbb{R}$ de modo que exista una única solución global del segundo problema de Cauchy, es decir, definida en todo $\mathbb{R}$.

c) Muestre que para todo x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ existe una función continua $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuamente diferenciable en $A = \{x \in \mathbb{R} : y(x) \neq 0\}$ y que resuelve el problema de Cauchy 1 en A.

P3. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{1+y}}{1+x^2} \\ y(a) = b \end{cases}$$

a) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema no tiene solución

b) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema tiene solución única y determínela.

c) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema tiene más de una solución y determínelas.