$\boxed{P1}$ a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

c.v: $u=\sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2u}\,dx$

$\Rightarrow dx = 2u\,du$

$$\Rightarrow \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(1-u)\cdot 2u\,du}{(1+u)}$$

$$= 2\left[\int \frac{u-u^2}{1+u}\,du\right]$$

$$= -2\left[\int \frac{u^2-u-2+2}{u+1}\,du\right]$$

$$= -2\left[\int \frac{(u+1)(u-2)+2}{1+u}\,du\right]$$

$$= -2\left[\int (u-2)\,du + 2\int \frac{1}{1+u}\,du\right]$$

$$= -2\left[\frac{u^2}{2} - 2u + 2\ln|u+1|\right] + C$$

volviendo a la variable original,

$$\Rightarrow \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = -x + 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+1| + C, \ C\in\mathbb{R}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}\,dx$

Usaremos Fracciones parciales:

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{Ax+B}{(1+x^2)} + \frac{C}{(1+x)} \Big/ (1+x^2)(1+x)$$

$$\Rightarrow \quad x = Ax+B(1+x)+C(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \quad x = Ax+Ax^2+B+Bx+C+Cx^2$$

$$\Rightarrow \quad x = x^2(A+C)+x(A+B)+B+C$$

i) $A+C=0$
ii) $A+B=1$
iii) $B+C=0$

$$\left.\begin{aligned} A &= -C \\ B &= -C \end{aligned}\right\} \; A=B=\frac{1}{2}$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{\ldots} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ldots}$$

$(1+x^2)(1+x) \qquad 2\,(1+x^2) \qquad 2 \quad 1+x$

Así, podemos escribir la integral como

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{x+1}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\left(\underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{u=1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{u=x+1}\right)dx\right]$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) + \arctan(x) - \ln|x+1|\right) + C, \quad C\in\mathbb{R}}$$

b) $\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$

Por partes, $u = \arctan(x) \to du = \frac{dx}{x^2+1}$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \to v = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= -\frac{\arctan(x)}{x} - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{(x^2+1)}$$

$$= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

FRACCIONES PARCIALES

$$\to \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= -\frac{\arctan(x)}{x} + \ln|x| - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$u = x^2 + 1$$
$$du = 2x\,dx$$

$$= \frac{-\arctan(x)}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$\boxed{= \frac{-\arctan(x)}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+1) + C \qquad C \in \mathbb{R} \ \blacksquare}$$

d) $\int x^n \sin(x)\,dx$

A priori, vemos que la recurrencia está asociada a $n$. Llamemos la expresión como $I_n$

$$I_n = \int x^n \sin(x)\,dx,$$

Por partes, $u = x^n \to du = n x^{n-1}\,dx$
$dv = \sin(x)dx \to v = -\cos(x)$

$$\Rightarrow I_n = -\cos(x)\,x^n + \int n x^{n-1}\cos(x)\,dx$$
$$= -\cos(x)\,x^n + n\int \underbrace{x^{n-1}\cos(x)\,dx}$$

J

$$J = \int x^{n-1} \cos(x)\,dx,$$

Por partes $u = x^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)x^{n-2}dx$
$dv = \cos(x) \Rightarrow v = \sin(x)$

$$\Rightarrow J = x^{n-1}\cdot \sin(x) - \int (n-1)\, x^{n-2}\cdot \sin(x)dx$$

$$\Rightarrow J = x^{n-1}\sin(x) - (n-1)\int \underbrace{x^{n-2}\sin(x)dx}_{I_{n-2}}$$

$$\Rightarrow I_n = -\cos(x)x^n + n\left[x^{n-1}\sin(x) - (n-1)I_{n-2}\right]$$

$$\boxed{I_n = -\cos(x)\,x^n + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)I_{n-2} \quad \forall n \geq 2}$$

$\boxed{P2}$ a) $(t^2 - t^2x)x' + x^2 + tx^2 = 0$

Primero ordenamos la ecuación

$$x't^2(1-x) + x^2(1+t) = 0$$

$$\Rightarrow x' = -\frac{x^2(1+t)}{t^2(1-x)}$$ | Es como variables separables. Ordenamos

$$\Rightarrow x' = \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{(1+t)}{t^2}$$ | Dejemos todos los "x" a la izq

$$\Rightarrow x' \cdot \frac{x-1}{x^2} = \frac{(1+t)}{t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} \cdot \frac{(x-1)}{x^2} = \frac{(1+t)}{t^2} \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{x-1}{x^2}\, dx = \int \frac{(1+t)}{t^2}\, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{t^2} + \int \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{x} + \ln|x| = -\frac{1}{t} + \ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R}}$$

Que corresponde a la solución implícita de la EDO.

b) $x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{3y^2+1}$

Reescribiendo la EDO,

$$x^2 y' = \frac{x^2+1}{3y^2+1}, \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow y'(3y^2+1) = \frac{(x^2+1)}{x^2}$$

Usaremos variables separables

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2+1) = \frac{(x^2+1)}{x^2} \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int (3y^2+1)\,dy = \int \frac{(x^2+1)}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{3y^3}{3} + y = x - \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^3 + y = x - \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

c) $x' + tx = t^3 x^3$

Es de Bernoulli (Resumen $y' + P(x)y = Q(x)y^n$) con $n = 3$.

Así, usamos el c.v: $u = x^{1-n} = x^{-2}$

$u = x^{-2}$ ; $u' = -2x^{-3} \cdot x'$

$\Rightarrow \quad x' + tx = t^3 x^3 \;/\cdot -2x^{-3}$

$\Rightarrow \quad -2x^{-3}x' - 2tx^{-2} = -2t^3$

$\Rightarrow \quad u' - 2tu = -2t^3 \;/\cdot$ Factor integrante $\mu(t)$

$$\mu(t) = e^{\int -2t\,dt} = e^{-2\int t\,dt} = e^{-2\cdot\frac{t^2}{2}} = e^{-t^2}$$

$$\Rightarrow \int (u \cdot e^{-t^2})' = \int -2t^3 e^{-t^2} dt$$

$v = t^2$ y por partes

$$\Rightarrow \quad u \cdot e^{-t^2} = e^{-t^2}(t^2+1) + C \;/\cdot e^{t^2}$$

$$\Rightarrow \quad u = (t^2+1) + e^{+t^2} C$$

Volviendo a la variable original, $u = x^{-2}$

$$\Rightarrow \quad x^{-2} = (t^2+1) + e^{+t^2} C \quad /(\;)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \left[(t^2+1) + e^{+t^2} C\right]^{-1/2}, \; C \in \mathbb{R}}$$

d) $t^3\frac{dy}{dt}+t^2y-y^2=2t^4$

El Hint nos ayuda a ver que es una ec. de Riccati. Busquemos un $y=at^b$ tal que sea solución particular de la EDO.

$$y=at^b \rightarrow y'=abt^{b-1}.$$

Reemplazando,

$$t^3(abt^{b-1})+t^2at^b-a^2t^{2b}=2t^4$$

$$\Rightarrow abt^{b+2}+at^{b+2}-a^2t^{2b}=2t^4$$

Si $b+2=2b=4$ $\Rightarrow$ $\boxed{b=2}$
(exponentes de t)

$$\Rightarrow 2a\cancel{t^4}+a\cancel{t^4}-a^2\cancel{t^4}=2\cancel{t^4}$$

$$\Rightarrow \quad 3a-a^2=2$$

más simple

$$\Rightarrow a(3-a)=2 \Rightarrow a=2 \text{ o } \boxed{a=1}$$

Usaremos $\boxed{y = t^2}$

(También se puede obtener por inspección)

Usamos ahora el c.v

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad (\text{para } y \neq y_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = t^2 + \frac{1}{z}} \to \boxed{y' = 2t - \frac{z'}{z^2}}$$

$$t^3 y' + t^2 y - y^2 = 2t^4 \quad / \text{ Reemplazando } y$$

$$\Rightarrow t^3\left(2t - \frac{z'}{z^2}\right) + t^2\left(t^2 + \frac{1}{z}\right) - \left(t^2 + \frac{1}{z}\right)^2 = 2t^4$$

$$\Rightarrow 2t^4 - \frac{t^3 z'}{z^2} + \cancel{t^4} + \frac{t^2}{z} - \cancel{t^4} - \frac{2t^2}{z} - \frac{1}{z^2} = 2t4$$

$$\Rightarrow \cancel{2t^4} - \frac{t^3 z'}{z^2} - \frac{t^2}{z} - \frac{1}{z^2} = \cancel{2t^4} \quad / \cdot z^2$$

$$\Rightarrow -t^3 z' - t^2 z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow z' t^3 + z t^2 = -1 \quad / \cdot \frac{1}{t^3}$$

$$\Rightarrow z' + \frac{z}{t} = -t^{-3} \quad \Big/ \begin{array}{l}\text{Factor. integrante} \\ \mu(t) = e^{\ln t} = t\end{array}$$

$$\Rightarrow (zt)' = -t^{-2} \quad / \int$$

$$\Rightarrow zt = -\int t^{-2}dt + C$$

$$\Rightarrow zt = \frac{1}{t} + C \quad / \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{t^2} + \frac{C}{t} \quad , C \in \mathbb{R}$$

Volviendo a la variable original

$$y = t^2 + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow y = t^2 + \frac{1}{\frac{1}{t^2} + \frac{C}{t}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = t^2 + \frac{t^2}{1+Ct} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{P3}$

$y(t) \to$ cantidad de agua en la manta en el tiempo $t$

$y'(t) \to$ cambio en la cantidad de agua en la manta en el tiempo $t$

Ahora, para plantear la EDO, analizamos el enunciado

- La razón de cambio de la humedad ($y'(t)$) es proporcional a $y(t)$

$$\boxed{y'(t) = K y(t)}$$

Además, si $t$ aumenta, entonces $y(t)$ decrece (pierde agua). Entonces $K \leq 0$.

Así, nuestro problema se reduce a

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = K y(t) \\ y(\underset{t=0}{0}) = 40 \end{cases}} \quad (PC)$$

Lo veremos después.

## P4 Nombremos variables

$x(t) \to$ Temperatura del Agua
$Y(t) \to$ Temperatura del Exterior
$t \to$ horas luego de iniciado el exp.

El agua se enfría (signo $-$) según la Ley de enfriamiento de Newton $\to$ rapidez $(x'(t))$ es proporcional $(k)$ a lo dif de T° entre el agua y el ambiente $(x(t) - Y(t))$

$$\Rightarrow \boxed{x'(t) = -k(x(t) - y(t))}$$

Con constante $k = \frac{1}{10}$ con el tiempo en horas.

$$\Rightarrow \boxed{x'(t) = \frac{1}{10}(y(t) - x(t))}$$

La T° exterior desciende 22°C a razón de 1,5°C por hora. $\to y' = -\frac{3}{2}t = -1{,}5t$
El pote de Agua parte a 50°C $\to x(0) = 50$
El exterior parte a 20°C $\to y(0) = 20$

$\Rightarrow$ $Y(t)$ satisface que

$Y(0) = 20$

$Y'(t) = -1,5t$

$$\Rightarrow \boxed{Y(t) = 20 - 1,5t}$$

Reemplazando en la EDO de $x$,

$$\boxed{x'(t) = \frac{1}{10}\left(20 - 1,5t - x(t)\right)}$$

$\hookrightarrow$ EDO que modela el problema

desarrollando,

Factor integrante

$$x' + \frac{1}{10}x = 2 - \frac{3t}{20} \quad / \quad \mu = e^{\frac{1}{10}t}$$

$$\Rightarrow \left(x e^{\frac{t}{10}}\right)' = \left(2 - \frac{3t}{20}\right) e^{\frac{t}{10}} \quad / \int$$

$$\Rightarrow x e^{\frac{t}{10}} = \int \left(2 - \frac{3t}{20}\right) e^{\frac{t}{10}} dt + C$$

$$\Rightarrow \quad x = e^{-t/10}\left[e^{t/10}\left(35 - \frac{3t}{2}\right) + C\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^{-\frac{t}{10}} C + 35 - \frac{3t}{2}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$\hookrightarrow$ Resultado EDO que modela el problema

Propuesto:

¿Qué significa que $x(0) = 50$ en la EDO?

Sol: Después de 5 horas la temperatura es

$x(5) \approx 36,6°C$