Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002-1,3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

# Pauta Auxiliar 14 (Pregunta 1)

Series y transformada de Fourier
20 de julio de 2020

**Profesor:** Michal Kowalczyk
**Auxiliares:** Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

**P1 (a - i)** $f(x)$ par implica que $f(-x) = f(x)$, de esta forma:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} f(-u)\cdot -\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\pi}^{0} f(-u)\cos(-nu)\cdot -\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\pi}^{0} f(-u)\,\mathrm{sen}(-nu)\cdot -\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\pi} f(u)\,\mathrm{sen}(nu)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

De esta forma:

$$[S(f)](x) = \frac{\left(2\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x\right)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right)\cos(nx)$$

Donde se demuestra que $S(f)$ corresponde a una serie de cosenos más una constante.

**P1 (a - ii)** $f(x)$ impar implica que $f(-x) = -f(x)$, de esta forma:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} f(-u)\cdot -\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{0}^{\pi} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\
a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\pi}^{0} f(-u)\cos(-nu)\ \cdot -\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\pi}^{0} f(-u)\operatorname{sen}(-nu)\cdot -\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} f(u)\operatorname{sen}(nu)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

De esta forma:

$$[S(f)](x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\right)\operatorname{sen}(nx)$$

Donde se demuestra que $S(f)$ corresponde a una serie de senos.

**P1 (b - i)** Desarrollando:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{(ix)}-e^{-(ix)}}{2}\right) = -i\operatorname{senh}(ix)$$

**P1 (b - ii)** Desarrollando:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{e^{(ix)}+e^{(ix)}}{2} = \cosh(ix)$$

**P1 (b - iii)** Desarrollando:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = i\left(\frac{e^{i(x/i)}-e^{-i(x/i)}}{2i}\right) = i\operatorname{sen}(x/i) = i\operatorname{sen}(-ix) = -i\operatorname{sen}(ix)$$

**P1 (b - iv)** Desarrollando:

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \frac{e^{i(x/i)}+e^{-i(x/i)}}{2} = \cos(x/i) = \cos(-ix) = \cos(ix)$$

**P1 (c)** Desarrollando por variables separables:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \Leftrightarrow \frac{X(x)}{X''(x)} = \frac{Y(y)}{Y''(y)} = -\lambda$$

Los típicos casos:

$\boxed{\lambda = 0}$ $X(x) = Ax + B$ e $Y(y) = Cy + D$.

Donde las soluciones $u(x,y) = X(x)Y(y)$ son en general incompatibles con la condición de borde particular de $u(0,y) = f(y)$.

$\boxed{\lambda < 0}$ $X(x) = Ee^{\sqrt{-\lambda}x} + Fe^{-\sqrt{-\lambda}x}$ e $Y(y) = Ge^{\sqrt{-\lambda}y} + He^{-\sqrt{-\lambda}y}$, así, se tiene que:

$$u(x,\pi) = 0 \Rightarrow X(x)Y(\pi) = 0 \Rightarrow Y(\pi) = 0$$

$$u(x,-\pi) = 0 \Rightarrow X(x)Y(-\pi) = 0 \Rightarrow Y(-\pi) = 0$$

Así, se tiene que:

$$Y(\pi) = Ge^{\sqrt{-\lambda}\pi} + He^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow H = -Ge^{2\sqrt{-\lambda}\pi}$$

Lo que implica:

$$Y(y) = Ge^{\sqrt{-\lambda}y} - Ge^{-\sqrt{-\lambda}(y-2\pi)} = Ge^{\sqrt{-\lambda}\pi}\left(e^{\sqrt{-\lambda}(y-\pi)} - e^{\sqrt{-\lambda}(y-\pi)}\right) = 2Ge^{\sqrt{-\lambda}\pi}\operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda}(y-\pi)\right)$$

Y por otro lado, se tiene que:

$$Y(-\pi) = 2Ge^{\sqrt{-\lambda}\pi}\operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda}(-\pi-\pi)\right) = 0 \Rightarrow G = 0 \Rightarrow Y(y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = 0$$

$\boxed{\lambda > 0}$ $X(x) = I\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + J\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ e $Y(y) = K\cos\left(\sqrt{\lambda}y\right) + L\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}y\right)$, así, se tiene que:

$$Y(\pi) = 0 \Rightarrow K\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + L\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

$$Y(-\pi) = 0 \Rightarrow K\cos\left(-\sqrt{\lambda}\pi\right) + L\operatorname{sen}\left(-\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \Rightarrow K\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) - L\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

Así, sumando los valores de $Y(\pi)$ e $Y(-\pi)$, es posible deducir que:

$$Y(\pi) - Y(-\pi) = 0 \Rightarrow 2L\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \Rightarrow \lambda_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Si es que por otro lado se suman:

$$Y(\pi) + Y(-\pi) = 0 \Rightarrow 2K_n\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\pi\right) \Rightarrow K_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que se llega a que:

$$Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{L}_n \operatorname{sen}(ny)$$

Recuperando la expresión de $u$:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n\bar{L}_n\cos(nx)\operatorname{sen}(ny) + J_n\bar{L}_n\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(ny) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n\cos(nx)\operatorname{sen}(ny) + \bar{J}_n\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(ny) \end{aligned}$$

Así, aplicando la condición sobre $x = 0$:

$$u(0,y) = f(y) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n\operatorname{sen}(ny) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(ny) \Rightarrow \bar{I}_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Mientras que la otra condición implica:

$$u(\pi/2, y) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \bar{J}_n \operatorname{sen}(ny) = 0 \Rightarrow \bar{J}_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que finalmente, se tiene que la solución corresponde a:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx) \operatorname{sen}(ny)$$